საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

წერეთელი ნინო

"მომგებიანობის ტესტირება სიცოცხლის დაზღვევის ზოგად მოდელში"

სპეციალობა – შიფრი გამოყენებითი მათემატიკა

დისერტაცია

მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად

კათედრა: №104 – გამოყენებითი მათემატიკა

ხელმძღვანელი – გ. მირზაშვილი

თბილისი
2002

1. ამოცანის დასმა

დაზღვევის სახეობათა ერთობლიობა ტრადიციულად ორ დიდ ჯგუფად იყოფა: სიცოცხლის დაზღვევა და დაზღვევის დანარჩენი სახეობები (არასიცოცხლის დაზღვევა). ამგვარი დაყოფა შემთხვევითი არ არის და სიცოცხლის დაზღვევის სახეობებს მართლაც მრავალი გამაერთიანებელი მახასიათებელი ნიშანი გააჩნიათ. ამ ნიშანთაგან უმთავრესი ის არის, რომ რისკი აქ ძირითადად ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობის განუსაზღვრელობით არის განპირობებული. არანაკლებ მნიშვნელოვანია, რომ არასიცოცხლის დაზღვევის სახეობებისაგან განსხვავებით სიცოცხლის დაზღვევა როგორც წესი გრძელვადიანია.

გრძელვადიანი ბიზნესის, მათ შორის სიცოცხლის დაზღვევის სწორი ფინანსური დაგეგმარება აქტუარული მეცნიერების უმთავრეს ამოცანას წარმოადგენს. ცნობილია, რომ სიცოცხლის დაზღვევის ბიზნესი დასაწყისში მნიშვნელოვან ხარჯებს მოითხოვს, რომელთა ანაზღაურება და შემდგომი მოგების მიღება მხოლოდ წლების შემდეგ ხდება. აქედან გამომდინარე აქციონერებისთვის უაღრესად მნიშვნელოვანია იმის ცოდნა, თუ რა სიდიდის კაპიტალის დაბანდებაა საჭირო, როგორი იქნება ფულადი ნაკადები მომდევნო წლების განმავლობაში, როდის მოხდება მოგებაზე გასვლა და როგორი იქნება ეს მოგება. ამასთან ერთად, მარკეტინგული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, სასურველია, რომ აქციონერებს მოვლენათა განვითარების რამდენიმე ვარიანტის განხილვის შესაძლებლობა ჰქონდეთ.

ცნობილია სიცოცხლის დაზღვევის კლასიკური ფორმები და შესაბამისი აქტუარული მოდელები: ვადიანი (რისკობრივი) სიცოცხლის დაზღვევა – Term Life (მათ შორის ცვალებად სადაზღვევო თანხიანი, მაგალითად საკრედიტო სიცოცხლის დაზღვევა), დაზღვევა ასაკის მიღწევამდე – Pure Endowment, შერეული სიცოცხლის დაზღვევა –

Endowment. ეს კლასიკური მოდელები როგორც წესი, ითვალისწინებენ ბიზნესის ან ერთჯერადი ან განვადებული მუდმივი საპრემიო შენატანებით დაფინანსებას. ასეთ შემთხვევაში შედარებით მარტივია მოცემული პრემიის შესაბამისი საშუალო ჯამური მოგების გამოთვლა ბიზნესის დასრულების მომენტისათვის და პირიქით, სასურველი საშუალო ჯამური მოგების მისაღწევად საჭირო პრემიის განსაზღვრა.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომი მიზნად ისახავს შემდეგი ამოცანების ამოხსნას.

1. სიცოცხლის დაზღვევის ზოგადი მოდელის ჩამოყალიბება, რომელიც დაზღვევის პერიოდის ყოველ t-ურ წელს ითვალისწინებს D_t თანხის გადახდას დაზღვეულის ამ წლის განმავლობაში გარდაცვალების შემთხვევაში და ასევე S_t თანხის გადახდას, თუ დაზღვეული ცოცხალია ამ წლის ბოლოს. ცხადია სრულიადაც არ იგულისხმება, რომ $\{D_t\}$ და $\{S_t\}$ მუდმივი მიმდევრობებია.
2. ამ ზოგადი მოდელის ფარგლებში მომგებიანობის შემოწმების (Profit Testing) პროცედურის შემუშავება და მისი კომპიუტერული რეალიზაცია, ანუ:

ა) პრემიების ნებისმიერი P_t ნაკადისთვის (იგულისხმება, რომ P_t პრემია გადაიხდება t-ური სადაზღვევო წლის დასაწყისში) ყოველი სადაზღვევო წლის შესაბამისი ფულადი ნაკადის და პოლისის ვადის ამოწურვის მომენტში საშუალო ჯამური მოგების სიდიდის განსაზღვრა რეზერვების ნებისმიერი ${}_tV$ მიმდევრობისათვის;

ბ) პოლისის ვადის ამოწურვის მომენტში სასურველი საშუალო ჯამური მოგების უზრუნველმყოფელი მუდმივი განვადებული

პრემიის დადგენა რეზერვების ნებისმიერი ${}_tV$ მიმდევრობი-
სათვის;

გ) ყოველი სადაზღვევო წლის სასურველი ფულადი ნაკადის შესაბამისი პრემიების P_t ნაკადის განსაზღვრა რეზერვების ნებისმიერი ${}_tV$ მიმდევრობისათვის;

დ) რეზერვების ${}_tV$ მიმდევრობის შერჩევა სასურველი ყოველ-წლიური მოგებების მისაღებად.

მოყვანილი ტერმინებისა და აღნიშვნების შინაარსი უფრო მკაფიოდ გამოჩნდება შემდგომ ტექსტში.

2. საბაზისო მათემატიკური ობიექტები

შემგომში სიცოცხლის დაზღვევის ყოველ სქემაში გამოყენებული იქნება შემდეგი ობიექტები:

x- დაზღვეულის სრულ წლებამდე დამრგვალებული ასაკი პოლისის შეძენის მომენტში - მთელი დადებითი რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს დაზღვეულის ზუსტი ასაკის მთელ ნაწილს;

i-წლიური საპროცენტო განაკვეთი;

ν-წლიური საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი დისკონტირების კოეფიციენტი

$$\nu = \frac{1}{1+i}.$$

${}_tp_x$-არის ალბათობა იმისა, რომ x ასაკს მიღწეული პიროვნება მიაღწევს $(x+t)$ ასაკს, $t \geq 0$; ${}_1p_x \equiv p_x$.

${}_tq_x$ - არის x ასაკს მიღწეული პიროვნების უახლოესი t წლის განმავლობაში გარდაცვალების ალბათობა, $t \geq 0$;

$_1q_x \equiv q_x$; $_0p_x = 1$; $_0q_x = 0$.

n-სადაზღვევო ხელშეკრულების მოქმედების პერიოდი - დაზღვევის პერიოდი.

ω-გამოყენებული მოკვდაობის ცხრილის მიხედვით ზღვრული ასაკი, ისე რომ $_mq_\omega = 1, m \geq 1$ და $_{\omega-x+1}p_x = 0$.

თვისებები:

$$_tp_x + {}_tq_x = 1$$
$$_tp_x \times {}_np_{x+t} = {}_{t+n}p_x$$

ყოველი არაუარყოფითი მთელი x-ისთვის შემოვიღოთ K_x შემთხვევითი სიდიდე – "x ასაკს მიღწეული პიროვნების დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობის სრული წლების რაოდენობა".

K_x მოიცემა შემდეგნაირად: იგი ღებულობს არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს და

$$P(K_x = m) = {}_mp_x \times q_{x+m}, \quad m = 0,1,2,\ldots,\omega - x.$$

დავრწმუნდეთ, რომ ამ ფორმულით მოიცემა ალბათური განაწილება. მართლაც

$$\sum_{m=0}^{\omega-x} {}_mp_x q_{x+m} = \sum_{m=0}^{\omega-x} {}_mp_x(1 - p_{x+m}) = \sum_{m=0}^{\omega-x}({}_mp_x - {}_{m+1}p_x) = {}_0p_x - {}_{\omega+1}p_x = 1.$$

შემოვიღოთ შემდეგი ინდიკატორული შემთხვევითი სიდიდეები:

$$\Psi_m(x) = I(K_x \geq m) = \begin{cases} 1, K_x \geq m \\ 0, K_x < m \end{cases}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\Psi_0(x)$ დეტერმინისტულია და $\Psi_0(x) = 1$. ასევე, შემდგომში $\Psi_1(x)$-ის ნაცვლად ყველგან გამოვიყენებთ $\Psi(x)$ აღნიშვნას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ რადგან $\Psi_m^k(x) = \Psi_m(x)$

$$E\Psi_m^k(x) = E\Psi_m(x) = {}_mp_x$$

და მაშასადამე,

$$D\Psi_m(x) = E\Psi_m^2(x) - [E\Psi_m(x)]^2 = E\Psi_m(x) - [E\Psi_m(x)]^2 = {}_m p_x \cdot (1 - {}_m p_x) = {}_m p_x \cdot {}_m q_x .$$

მართლაც,

$$E\Psi = P(K_x \geq m) = \sum_{k=m}^{\omega-x} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=m}^{\omega-x} {}_k p_x (1 - p_{x+k}) = \sum_{k=m}^{\omega-x} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) = {}_m p_x .$$

გარდა ამისა, გასაგებია, რომ თუ $\Psi_m(x) = 0$, მაშინ $\Psi_r(x) = 0$ ყოველი $r > m$-სათვის და მაშასადამე, $\Psi_m(x)$ და $\Psi_r(x)$ შემთხვევითი სიდიდეები არ არიან დამოუკიდებელი. ცხადია, რომ როცა $r \geq m$,

$$\text{cov}(\Psi_m(x); \Psi_r(x)) = E[\Psi_m(x) \cdot \Psi_r(x)] - E\Psi_m(x) \cdot E\Psi_r(x) = E\Psi_r(x) \cdot (1 - E\Psi_m(x)) = {}_r p_x \cdot {}_m q_x$$

და

$$\rho(\Psi_m(x); \Psi_r(x)) = \sqrt{\frac{{}_r p_x \cdot {}_m q_x}{{}_r q_x \cdot {}_m p_x}} .$$

შემდგომ პუნქტებში ჩვენ განვიხილავთ სიცოცხლის დაზღვევის სხვადასხვა ცნობილ მოდელებს და ასევე მათ გამაერთიანებელ ვადიანი სიცოცხლის დაზღვევის ზოგად მოდელს.

3. დაზღვევა ასაკის მიღწევამდე (Pure endowment)

საინტერესოა, თუ როგორ გამოიყურება პირველ პარაგრაფში ჩამოყალიბებული მე-2 ამოცანა კლასიკურ მოდელებში.

კლასიკური სახეობების და შესაბამისი მოდელების განხილვა დავიწყოთ დაზღვევით ასაკის მიღწევამდე. ამ ტიპის სადაზღვევო კონტრაქტის პირობით, მზღვეველი დაზღვეულს გადაუხდის წინასწარ შეთანხმებულ S თანხას იმ შემთხვევაში, თუ დაზღვევის პერიოდის ბოლოს (n წლის ბოლოს) ის ცოცხალია, ხოლო თუ დაზღვეული ვერ იცოცხლებს დაზღვევის პერიოდის ბოლომდე, მზღვეველი არაფერს არ იხდის.

ასეთ შემთხვევაში, მზღვეველის მიერ აღებული რისკის ღირე-ბულება პოლისის გაცემის მომენტისათვის მოიცემა შემდეგნაირად:

$$L_n = \nu^n \Psi_n(x) \times S\,, \qquad (3.1)$$

სადაც n (როგორც მე-2 პუნქტიდან გვახსოვს) დაზღვევის პერიოდია.

თუ დამზღვევი სადაზღვევო P^1 პრემიას გადაიხდის ერთჯერადად პოლისის გაცემისთანავე, მაშინ კომპენსირებული L_n რისკის ღირებუ-ლება პოლისის გაცემის მომენტში ტოლი იქნება:

$$R^1 = P^1 - L_n\,. \qquad (3.2)$$

საჭირო პრემიის სიდიდის გამოსათვლელად ხშირად იყენებენ ე.წ. ექვივალენტობის პრინციპს, ანუ

$$ER^1 = 0\,, \qquad (3.3)$$

ხოლო ამ პრინციპით მიღებულ პრემიას ეწოდება წმინდა ნეტო პრემია.

(3.1) და (3.3)-დან წმინდა ნეტო პრემიის სიდიდე ტოლია:

$$P^1 = EL_n = \nu^n \cdot S \cdot {}_n p_x\,. \qquad (3.4)$$

თუ დაფინანსება ხდება ყოველწლიური P_t პრემიებით, რომელთა გადახდა ხდება t-ური წლის დასაწყისში, $t = \overline{1,n}$, მაშინ კომპენსირებული რისკის მნიშვნელობა პოლისის გაცემის მომენტისათვის იქნება:

$$R_0 = \sum_{t=1}^{n} \nu^{t-1} \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot P_t - L_n\,. \qquad (3.5)$$

მოხერხებულობისათვის სადაზღვევო პრაქტიკაში პრემიების P_t მიმდევრობის მაგივრად, ხშირად მიღებულია სადაზღვევო პრემიის ერთი მნიშვნელობის დაწესება, ანუ $P_1 = P_2 = \dots P_n \equiv \overline{P}_{n0}$. ამ მუდმივი ყოველ-წლიური პრემიის, ანუ წმინდა ნეტო პრემიის სიდიდე ექვივალენტობის პრინციპიდან გამომდინარე ტოლი იქნება:

$$\overline{P}_{n0} = \frac{\nu^n {}_n p_x}{\sum_{t=1}^{n} \nu^{t-1} {}_{t-1} p_x} \cdot S. \qquad (3.6)$$

ეს არის ის მუდმივი პრემია, რომელიც საშუალოდ ფარავს რისკს და რომელსაც არა აქვს სხვა ხარჯების დაფარვისა და მოგების მოტანის დატვირთვა.

როგორც ცნობილია, წმინდა ნეტო პრემია არ არის საკმარისი ბიზნესის წარმოებისათვის, ვინაიდან საჭიროა ხარჯების დაფარვისა და ბიზნესის მომგებიანობის გათვალისწინება.0

ამ მიზნით შემოვიღოთ ხარჯების $\{e_t\}$ მიმდევრობა: ყოველი e_t წარმოადგენს t-ური სადაზღვევო წლის დასაწყისში გაწეული აკვიზიციური და ინკასაციური ხარჯებისა და t-ური წლის განმავლობაში გასაწევი ადმინისტრაციული ხარჯების ერთობლიობას (ცხადია, რომ საუბარია ერთ პოლისზე გადათვლილ ხარჯებზე). მაშინ კომპენსირებული რისკის მნიშვნელობა (ღირებულება) პოლისის გაცემის მომენტში შემდეგნაირად გამოიყურება:

$$R_n = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1} \Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t) - v^n \Psi_n(x) \cdot S. \tag{3.7}$$

გასაგებია, რომ R_n წარმოადგენს ერთი პოლისიდან მიღებული მოგების დღევანდელ (პოლისის გაცემის მომენტში) ღირებულებას (მნიშვნელობას).

თუ σ-თი აღვნიშნავთ კომპანიისათვის სასურველი საშუალო ჯამური მოგების დღევანდელ ღირებულებას, გადათვლილს ერთ პოლისზე, მაშინ ამ მოგების მისაღებად საჭირო პრემიების დასადგენად ექვივალენტობის ზემოხსენებული პრინციპიდან გამომდინარე, უნდა ამოიხსნას შემდეგი განტოლება:

$$E(R_n - \sigma) = 0\,. \tag{3.8}$$

კვლავ, თუ დავუშვებთ, რომ პრემიები მუდმივია, შესაძლებელია ამ განტოლებიდან პრემიის გამოთვლა. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ საშუალო ჯამური მოგების დღევანდელი ღირებულება ასე გამოისახება:

$$\sigma = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot \beta_t = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot CF_t \ , \tag{3.9}$$

სადაც

$$\beta_t = {}_{t-1}p_x\left[(P_t - e_t)(1+i) - Sp_{x+t-1}\right] \tag{3.10}$$

არის ყოველწლიური საშუალო მოგება, ხოლო

$$CF_t = (P_t - e_t)(1+i) - Sp_{x+t-1}, \tag{3.11}$$

წარმოადგენს t-ური წელიწადის ფულად ნაკადს.

მუდმივი $\overline{P}_n$ პრემიის სიდიდე (3.9) და (3.10)-დან გამომდინარე, ტოლია:

$$\overline{P}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x e_t + v^n\,{}_n p_x \cdot S + \sigma}{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x}. \tag{3.12}$$

თუ ყოველწლიური პრემიები მუდმივი არ არის, მაშინ ექვი-ვალენტობის (3.8) განტოლება აღარ არის საკმარისი პრემიათა $\{P_t\}$ მიმდევრობის ცალსახად განსასაზღვრავად. მეორეს მხრივ, პრემიების მოცემული $\{P_t\}$ მიმდევრობის დროს, (3.10) ფორმულა ყოველწლიური საშუალო $\{\beta_t\}$ მოგებების გამოთვლის საშუალებას იძლევა. ეს სიდიდეები კი მჭიდროდაა დაკავშირებული კომპანიის ფინანსური ნაკადების დაგეგმარებასთან. სწორედ ეს არის ერთ-ერთი ამოსავალი დანარჩენი (n - 1) ცალი განტოლების დასაწერად $\{P_t\}$ მიმდევრობის ცალსახად განსაზღვრისათვის: ვასახელებთ სასურველ ყოველწლიურ საშუალო მოგებებს და (3.8) განტოლებასთან ერთად ვადგენთ n ცვლადიან n ცალ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} {}_{t-1}p_x \cdot \left[(P_t - e_t)(1+i) - Sp_{x+t-1}\right] = \beta_t, \quad t = 1,2,\ldots,n-1 \\ ER = \sigma \end{cases}, \tag{3.13}$$

რომლის ამონახსნიც იქნება პრემიათა ის ნაკადი, რომელიც უზრუნ-ველყოფს სასურველ გეგმით დასახულ მაჩვენებლებს.

(3.13) სისტემის ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$P_t = e_t + \frac{\beta_t + S \cdot_t p_x}{(1+i) \cdot_{t-1} p_x}, \quad t = 1,2,\ldots,n-1, \qquad P_n = e_n + \frac{\sigma - \sum_{t=1}^{n-1} \nu^t \cdot \beta_t + \nu^n \cdot_n p_x \cdot S}{\nu^{n-1} \cdot_{n-1} p_x}. \quad (3.14)$$

მეორე ასეთ ამოსავალს შეიძლება წარმოადგენდეს ყოველი სადაზღვევო წელიწადის ბოლოსათვის მიმდევრობით ჯამურ მოგებათა სასურველი მნიშვნელობები, რომელსაც ჩვენ დავუბრუნდებით სიცოცხლის დაზღვევის ზოგადი მოდელის განხილვისას.

ყველაფერი ზემოთ თქმულის კომპიუტერული რეალიზება შეიძლება Excel-ის ფორმატში (იხ. დანართი I). I ტიპის Excel-ის ცხრილში შევიყვანოთ საწყისი მონაცემები: დაზღვევის პერიოდი, დაზღვეულის ასაკი, ამ ასაკში მოკვდაობის ცხრილის მაჩვენებლები, სადაზღვევო თანხა, პრემიების მიმდევრობა, რომელიც რაღაც მოსაზრებიდანაა დადგენილი, ხარჯების მიმდევრობა, წლიური საპროცენტო განაკვეთი და ამ საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი დისკონტირების კოეფიციენტი. ამ მონაცემებზე დაყრდნობით პროგრამა ავტომატურად გადათვლის საძიებელ სიდიდეებს და მოგვცემს როგორც ყოველწლიურ საშუალო მოგებებს, ასევე ჯამური მოგების დღევანდელ ღირებულებას. საწყისი მონაცემების შეცვლა ავტომატურად იწვევს შედეგების შეცვლას, ამიტომ შეგვიძლია ცდების შედეგად შევარჩიოთ პრემიების ისეთი ნაკადი, რომელიც უზრუნველყოფს ჩვენთვის სასურველ ჯამურ მოგებას. ამ პროცედურას სადზღვევო საქმეში ეწოდება მომგებიანობის ტესტირება (Profit Testing).

II ტიპის ცხრილში საწყისი მონაცემებია:
დაზღვევის პერიოდი, დაზღვეულის ასაკი, მოცემული ასაკის შესაბამისი მოკვდაობის ცხრილის მაჩვენებლები, სადაზღვევო თანხა, ხარჯების მიმდევრობა, წლიური საპროცენტო განაკვეთი შესაბამისი დისკონ-ტირების კოეფიციენტით და ჯამური მოგების სასურველი დღევანდელი

ღირებულება. ამ მონაცემების საფუძველზე Excel-ის პროგრამა საშუალებას იძლევა გამოითვალოს მუდმივი პრემიის სიდიდე.

III ტიპის ცხრილში საწყისი მონაცემებია:

დაზღვევის პერიოდი, დაზღვეულის ასაკი, მოცემული ასაკის შესაბამისი მოკვდაობის ცხრილის მაჩვენებლები, სადაზღვევო თანხა, ხარჯების მიმდევრობა, წლიური საპროცენტო განაკვეთი და ყოველწლიური საშუალო მოგებები, რომელთა გამოყენებითაც Excel-ის პროგრამა ცხრილში ავტომატურად გადათვლის საჭირო ყოველწლიური პრემიების მიმდევრობას. ამ ტიპის ცხრილშიც მონაცემების შეცვლა შეიძლება ავტომატურად და შედეგებიდან გამომდინარე საშუალება გვაქვს შევარჩიოთ ჩვენთვის სასურველი სადზღვევო პროდუქტი.

ეს სამუშაო წარმოდგენილია დანართში, სადაც შეგვიძლია ვიხილოთ რამდენიმე ნიმუში სხვადასხვა მოცემულობების დროს.

4. სიცოცხლის დაზღვევა (Life)

n-წლიანი სიცოცხლის დაზღვევის კლასიკური პროდუქტი ითვალისწინებს დაზღვეულის მემკვიდრეებზე წინასწარ შეთანხმებული D თანხის გაცემას იმ შემთხვევაში, თუ დაზღვეული გარდაიცვლება დაზღვევის პერიოდის განმავლობაში. სიმარტივისათვის, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ სადაზღვევო ანაზღაურება გაიცემა იმ სადაზღვევო წლის ბოლოს, რომლის განმავლობაშიც მოხდა გარდაცვალება. თუ დაზღვეული ცოცხალია სადაზღვევო პერიოდის ბოლოს, არანაირი სადაზღვევო ანაზღაურება არ გაიცემა.

მზღვეველის მიერ აღებული რისკის ღირებულება პოლისის გაცემის მომენტისათვის არის:

$$L_n = D(1-\Psi(x)v + \Psi(x)(1-\Psi_2(x))v^2 + \ldots + \Psi_{n-1}(x)(1-\Psi_n(x))v^n) =$$

$$= D\sum_{t=1}^{n}\Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x))v^t \qquad (4.1)$$

შევნიშნოთ, რომ

$$E\,\Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)) = EI(t-1 \le K_x < t) = P(t-1 \le K_x < t) =$$

$$= P(K_x < t / K_x \ge t-1) \times P(K_x \ge t-1) = {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+t-1} \equiv {}_{t-1|}q_x\,. \qquad (4.2)$$

დაზღვევის ერთჯერადი P^1 პრემიით დაფინანსებისას, რომელიც პოლისის გაცემისთანავე გადაიხდება, კომპენსირებული L_n რისკის მნიშვნელობა პოლისის გაცემის მომენტში იქნება

$$R^1 = P^1 - L_n\,, \qquad (4.3)$$

ხოლო (4.2)-ის გათვალისწინებით შესაბამისი წმინდა ნეტო პრემია ტოლი იქნება:

$$P^1 = D\cdot\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_{t-1|}\,q_x\,. \qquad (4.4)$$

თუ დაფინანსება ხდება ყოველწლიური P_t პრემიებით, რომელთა გადახდა ხდება t-ური წლის დასაწყისში, მაშინ კომპენსირებული რისკის მნიშვნელობა პოლისის გაცემის მომენტისათვის იქნება:

$$R_0 = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\Psi_{t-1}(x)P_t - L_n = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1}P_t - D\cdot v\,\Psi_{t-1}(x)\cdot(1-\Psi_t(x))\,. \qquad (4.5)$$

კვლავ, მე-3 პუნქტის ანალოგიურად, თუ $\overline{P}_{n0} \equiv P_1 = P_2 = \ldots = P_n$ და ამ მუდმივი ყოველწლიური პრემიის გამოსათვლელად გამოვიყენებენთ ექვივალენტობის პრინციპს, $ER_0 = 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\overline{P}_{n0} = \frac{D\cdot\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_{t-1|}\,q_x}{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\cdot {}_{t-1}p_x}\,. \qquad (4.6)$$

თუ კვლავ გავითვალისწინებთ e_t ხარჯებს, მაშინ კომპენსირებული რისკი იქნება:

$$R_n = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1} \cdot \Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t) - D\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot \Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)\,. \qquad (4.7)$$

მოცემული პრემიის ნაკადისათვის (4.7)-ის გასაშუალება გვაძლევს ჯამური საშუალო მოგების დღევანდელი ღირებულებისა და ყოველწლიურ საშუალო მოგებათა გამოთვლის საშუალებას:

$$\sigma = ER_n = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x(P_t - e_t) - D\sum_{t=1}^{n}({}_{t-1}p_x - {}_t\,p_x)\cdot v^t =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot \beta_t\,, \qquad (4.8)$$

სადაც

$$\beta_t = {}_{t-1}p_x \cdot \left[(P_t - e_t)\cdot(1+i) - D\cdot q_{x+t-1}\right]. \qquad (4.9)$$

კვლავ, თუ $\overline{P}_n \equiv P_1 = P_2 = ... = P_n$, მაშინ ამ მუდმივი პრემიის სიდიდე, რომელიც σ-ს მოცემული მნიშვნელობისათვის $ER_n = \sigma$ განტოლებას აკმაყოფილებს, იქნება ასეთი:

$$\overline{P}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\cdot{}_{t-1}p_x \cdot e_t + D\cdot\sum_{t=1}^{n} v^t\cdot{}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} + \sigma}{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\cdot{}_{t-1}p_x}. \qquad (4.10)$$

როცა პრემიების მიმდევრობა მუდმივი არ არის, მაშინ $ER = \sigma$ განტოლება პრემიათა $\{P_t\}$ მიმდევრობის ცალსახად განსაზღვრისათვის კვლავ არ არის საკმარისი და წინა პუნქტის მსგავსად, თუ დავასახელებთ სასურველ ყოველწლიურ საშუალო მოგებებს, კვლავ მოგვიწევს (3.13)-ის მსგავს განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. კერძოდ, ამ შემთხვევაში ამოსახსნელ განტოლებათა სისტემას ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{cases} {}_{t-1}p_x \cdot \left[(P_t - e_t)(1+i) - D\cdot q_{x+t-1}\right] = \beta_t\,, \quad t = 1,2,...,n-1 \\ ER = \sigma \end{cases}, \qquad (4.11)$$

ხოლო მისი ამონახსნია:

$$P_t = e_t + v \cdot \left(\frac{\beta_t}{{}_{t-1}p_x} + D \cdot q_{x+t-1} \right), \quad t = 1,2,\ldots,n-1, \tag{4.12}$$

$$P_n = e_n + \frac{\sigma - \sum_{t=1}^{n-1} v^t \cdot \beta_t}{v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x} + v \cdot D \cdot q_{x+n-1}. \tag{4.13}$$

საინტერესოა განვიხილოთ დაზღვევის კიდევ ერთი გავრცელე-ბული სახეობის, სიცოცხლის საკრედიტო დაზღვევის (Credit Life) მაგალითი, რომლის შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: ამ ტიპის სადაზღვევო ხელშეკრულების თანახმად, კომპანია აზღვევს პიროვნებას, რომელსაც ბანკიდან გამოაქვს კრედიტი და ვალდებულია დაფაროს ეს თანხა მოცემული დროის განმავლობაში; თუ აღნიშნული პიროვნება გარდაიცვალა კრედიტის დაფარვის პერიოდში, მაშინ სადაზღვევო კომპანია ვალდებულია დაფაროს თანხის ის დარჩენილი ნაწილი, რომელიც კრედიტის ამღებს დარჩა დაუფარავი. აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ კრედიტის დაფარვასთან ერთად მცირდება დავალიანების სიდიდე. შესაბამისად მცირდება რისკის სიდიდეც. ამიტომ ბუნებრივად ჩნდება პრემიების კლებადი მიმდევრობის განხილვის აუცილებლობა.

პრაქტიკაში აგრეთვე გამოიყენება სიცოცხლის საკრედიტო დაზღვევის სახეობის მსგავსი დაზღვევა ცვალებადი სადაზღვევო თანხით, რომელსაც Variable Life ეწოდება და რომლის სადაზღვევო თანხები, Credit Life-ისგან განსხვავებით შეიძლება იყოს როგორც ზრდადი, ასევე კლებადი. შესაბამისი ტესტური პროცედურები ასევე რეალიზებულია Excel-ის პროგრამის გამოყენებით (იხ. დანართი I).

5. ვადიანი სიცოცხლის დაზღვევის ზოგადი მოდელი

ვადიანი სიცოცხლის დაზღვევის ზოგადი მოდელი გულისხმობს ყოველი t-ური სადაზღვევო წლის ბოლოს დაზღვეულზე ან მის მემკვიდრეზე შესაბამისად S_t "გადარჩენის" ან D_t "გარდაცვალების" ანაზღაურების გაცემას. აღვნიშნოთ, რომ ამ ზოგადი მოდელის კერძო შემთხვევა, როდესაც ყველა $D_t = 0$, $S_t = 0, t = 1,\dots,n-1$ და $S_n = S$, განხილულია მე-3 პარაგრაფში, ხოლო მეორე კერძო შემთხვევა, როდესაც $S_t = 0, D_t = D$, განხილულია მე-4 პარაგრაფში.

ამ მოდელში მზღვეველის მიერ აღებული მთლიანი რისკი პოლისის გაცემის მომენტისათვის არის:

$$L_n = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot (D_t \cdot \Psi_{t-1}(x)(1 - \Psi_t(x) + S_t \Psi_t(x)) \qquad (5.1)$$

დაზღვევის ერთჯერადი P^1 პრემიით დაფინანსებისას, რომელიც პოლისის გაცემისთანავე გადაიხდება, კომპენსირებული L_n რისკის მნიშვნელობა პოლისის გაცემის მომენტში იქნება

$$R^1 = P^1 - L_n, \qquad (5.2)$$

ხოლო შესაბამისი წმინდა ნეტო პრემია ტოლი იქნება:

$$P^1 = EL_n = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot (D_t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} + S_t \cdot {}_t p_x) \qquad (5.3)$$

დაზღვევის $\{P_t\}$ პრემიების ნაკადით ფინანსირების შემთხვევაში, კომპენსირებული რისკის მნიშვნელობა პოლისის გაცემის მომენტი-სათვის ტოლი იქნება

$$R_0 = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot (P_t \cdot \Psi_{t-1}(x) - D_t \cdot \Psi_{t-1}(x)(1 - \Psi_t(x)) - S_t \Psi_t(x)) \qquad (5.4)$$

და თუ $\overline{P}_{n0} \equiv P_1 = P_2 = \ldots = P_n$, ხოლო ამ მუდმივი ყოველწლიური პრემიის გამოსათვლელად გამოვიყენებენთ ექვივალენტობის პრინციპს, $ER_0 = 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\overline{P}_{n0} = \frac{\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot (D_t \cdot {}_{t-1|} q_x + S_t \cdot {}_t p_x)}{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1} \cdot {}_{t-1} p_x}. \tag{5.5}$$

ახლა, თუ დაზღვევა ფინანსირდება $\{P_t\}$ პრემიების ნაკადით და ხასიათდება $\{e_t\}$ ხარჯების ნაკადით (ყოველი P_t და e_t გადაიხდება t-ური წლის დასაწყისში), მაშინ მთლიანი კომპენსირებული რისკი იქნება

$$R_n = \sum_{t=1}^{n} v^{t-1} \cdot \Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t) - \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot (D_t \Psi_t(x)(1 - \Psi_t(x)) + S_t \Psi_t(x))$$

ან

$$R_n = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot \left(\Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t)(1+i) - D_t \Psi_{t-1}(x)(1 - \Psi_t(x)) - S_t \Psi_t(x)\right). \tag{5.6}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$ER_n = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot {}_{t-1} p_x \cdot \left((P_t - e_t)(1+i) - D_t \cdot q_{x+t-1} - S_t \cdot p_{x+t-1}\right). \tag{5.7}$$

"საშუალოდ საკმარისი" პრემიების $\{P_t\}$ ნაკადისათვის, რომელიც საშუალოდ σ მოგებას გვიტოვებს, გვექნება განტოლება

$$ER_n = \sigma, \tag{5.8}$$

რომელსაც ძირითადს ვუწოდებთ.

თუ გვაქვს პრემიების მოცემული ნაკადი, რომელიც დადგინდა რაღაც მოსაზრებებით, მაშინ ძირითადი განტოლება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ σ მოგება და ჩავატაროთ Profit Testing-ის გამარტივებული პროცედურა, როგორც ეს წინა პუნქტებში მოყვანილ მაგალითებში იყო გაკეთებული.

როგორც წინა პუნქტებშიც ვნახეთ, ძირითადი განტოლება საკმარისია პრემიების დასადგენად, თუკი ისინი ერთმანეთის ტოლია, ანუ $\overline{P_n} \equiv P_1 = P_2 = \ldots = P_n$. ზოგად მოდელშიც ეს ფაქტი უცვლელი რჩება და შესაბამის მუდმივ პრემიას ასეთი სახე აქვს:

$$\overline{P_n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \nu^{t-1} \cdot {}_{t-1}p_x \cdot e_t + \sum_{t=1}^{n} \nu^{t} \cdot {}_{t-1}p_x \cdot (D_t \cdot q_{x+t-1} + S_t \cdot p_{x+t-1}) + \sigma}{\sum_{t=1}^{n} \nu^{t-1} \cdot {}_{t-1}p_x}. \qquad (5.9)$$

კვლავ, თუ პრემიები მუდმივი არ არის, მაშინ ძირითადი განტოლება საკმარისი არ არის და საჭიროა დამატებითი $(n-1)$ პირობის მოცემა.

ასეთი დამატებითი $(n-1)$ პირობის ჩამოყალიბების ამოსავლად ბუნებრივია, კვლავ ყოველწლიური სასურველი $\{\beta_t\}$ საშუალო მოგებები ავიღოთ. (3.13)-სა და (4.11)-ის ანალოგიურ განტოლებათა სისტემას ზოგადი მოდელისათვის ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{cases} {}_{t-1}p_x \cdot \left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t \cdot q_{x+t-1} - S_t \cdot p_{x+t-1}\right] = \beta_t, \quad t = 1,2,\ldots,n-1 \\ ER = \sigma \end{cases}. \qquad (5.10)$$

ცხადია, ამ სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს

$$P_t = e_t + \nu \cdot \left(\frac{\beta_t}{{}_{t-1}p_x} + D_t \cdot q_{x+t-1} + S_t \cdot p_{x+t-1} \right), \quad t = 1,2,\ldots,n-1, \qquad (5.11)$$

$$P_n = e_n + \frac{\sigma - \sum_{t=1}^{n-1} \nu^t \cdot \beta_t}{\nu^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x} + \nu \cdot \left(D_n \cdot q_{x+n-1} + S_n \cdot p_{x+n-1}\right). \qquad (5.12)$$

ყველაფერი ზემოთქმული ასევე რეალიზებულია Excel-ის ფორმატში (იხ. დანართი I).

კიდევ ერთ ამოსავალს $\{P_t\}$ პრემიებისათვის დამატებითი $(n-1)$ პირობის ჩასაწერად, როგორც ადრე აღვნიშნეთ, შეიძლება წარმოადგენდეს ყოველი სადაზღვევო წელიწადის ბოლოსათვის

მიმდევრობით ჯამურ მოგებათა სასურველი საშუალო მნიშვნელობები, რომლებსაც ჩვენ $\{\mu_t\}$-თი აღვნიშნავთ.

ამ შემთხვევაში შემოვიღოთ ე.წ. მიმდევრობითი რისკებისა და მიმდევრობითი კომპენსირებული რისკების ცნებები. ყოველი m = 1,2,…,n-თვის შემოვიღოთ სიდიდეები:

$$L_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot (D_t \cdot \Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)) + S_t \Psi_t(x)) \tag{5.13}$$

და

$$R_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot \left(\Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t)(1+i) - D_t \Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)) - S_t \Psi_t(x)\right). \tag{5.14}$$

ცხადია, რომ ამ სიდიდეებს აქვთ იგივე შინაარსი, რაც ჰქონდათ L_n და R_n სიდიდეებს, ოღონდ არა კონტრაქტის მთლიანი ვადისათვის მხოლოდ, არამედ კონტრაქტის მოქმედების ყოველი (m-ური) წლის ბოლოსათვის.

ცხადია, რომ

$$ER_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot \left(P_t \cdot (1+i) - C_t\right), \tag{5.15}$$

სადაც

$$C_t \equiv e_t \cdot (1+i) + D_t \cdot q_{x+t-1} + S_t \cdot p_{x+t-1}, \tag{5.16}$$

წარმოადგენს კომპანიის t-ური წლის მთლიან საშუალო ხარჯს.

მაშასადამე, ჩვენ ვსაუბრობთ ასეთ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot \left(P_t \cdot (1+i) - C_t\right) = \mu_m, \\ m = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{5.17}$$

სადაც $\mu_n = \sigma$.

ამ სისტემის ამოხსნა არ არის რთული (საკმარისია ყოველ მომდევნო განტოლებას დავაკლოთ წინა) და ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$P_m = v \cdot C_m + \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{v^{m-1} \cdot {}_{m-1}p_x}, \; 1 \le m \le n, \tag{5.18}$$

სადაც $\mu_0 \equiv 0$.

შევნიშნოთ, რომ (5.10)-ით განმარტებულ $\{\beta_t\}$ და (5.17)-ით განმარტებულ $\{\mu_t\}$ მიმდევრობებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა კავშირები, რომლებსაც ასეთი სახე აქვთ:

$$\beta_t = (1+i)^t \cdot (\mu_t - \mu_{t-1}) \tag{5.19}$$

და

$$\mu_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot \beta_t \,. \tag{5.20}$$

(5.19) და (5.20) ფორმულების სამართლიანობა მიუთითებს იმაზე, რომ (5.10) სისტემის ამონახსნი და (5.18) ერთმანეთს ემთხვევა, ანუ პრემიების ცალსახად დადგენის ზემოთ აღწერილი ორი ამოსავალი ერთმანეთის ექვივალენტურია.

დავსვათ ახლა ასეთი შეკითხვა: როგორი მუდმივი $\overline{P}_m$ პრემია უნდა ავიღოთ იმისათვის, რომ m წლის ბოლოს მივიღოთ μ_m მოგება?

ცხადია, ამ შეკითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი განტოლების ამოხსნა:

$$\sum_{t=1}^{m} v^t \cdot \left(\overline{P}_m \cdot (1+i) - C_t\right) \cdot {}_{t-1}p_x = \mu_m, \tag{5.21}$$

რომელსაც ასეთი სახე აქვს:

$$\overline{P}_m = \frac{\sum_{t=1}^{m} v^{t-1} \cdot {}_{t-1}p_x \cdot P_t}{a_m} = \frac{\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot (a_t - a_{t-1})}{a_m} = P_m - \sum_{t=1}^{m-1} \frac{a_t}{a_m} \cdot (P_{t+1} - P_t)\,, \tag{5.22}$$

სადაც

$$a_m \equiv \sum_{t=1}^{m} v^{t-1} \cdot {}_{t-1}p_x \tag{5.23}$$

და $\{P_t\}$ მიმდევრობა განმარტებულია (5.18)-ით.

აღსანიშნავია, რომ $m = n$-თვის (5.22) ემთხვევა (5.9)-ს. გარდა ამისა, (5.22) ამყარებს კავშირს $\{\overline{P}_t\}$ და $\{P_t\}$ მიმდევრობებს შორის $\{\mu_t\}$

მიმდევრობის გარეშე და (5.22)-დან შესაძლებელია პირიქით $\{P_t\}$ მიმდევრობის "ამოხსნაც":

$$P_{m+1} = \frac{\overline{P}_{m+1} \cdot a_{m+1} - \overline{P}_m \cdot a_m}{a_{m+1} - a_m}. \tag{5.24}$$

დავუბრუნდეთ (5.15)-ს და შევხედოთ მას, როგორც პრემიათა მიმდევრობის ფუნქციას, რომელსაც ცხადია, m წლის ბოლოსათვის მიღებული საშუალო მოგების დღევანდელი ღირებულების შინაარსი აქვს:

$$PRO_m(P_1, P_2, ..., P_m) \equiv ER_m = \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot \left(P_t \cdot (1+i) - C_t\right). \tag{5.25}$$

გასაგებია, რომ თუ ამ ფუნქციაში ჩავსვამთ (5.18)-ით განსაზღვრულ პრემიებს, გვექნება

$$PRO_m(P_1, P_2, ..., P_m) = PRO_m(\overline{P}_m, \overline{P}_m, ..., \overline{P}_m) = \mu_m. \tag{5.26}$$

ახლა ჩვენთვის საინტერესო საკითხს წარმოადგენს

$$PRO_m(\overline{P}_k) \equiv PRO_m(\overline{P}_k, \overline{P}_k, ..., \overline{P}_k) = \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot \left(\overline{P}_k \cdot (1+i) - C_t\right) = \overline{P}_k \cdot a_m - \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot C_t \tag{5.27}$$

მოგებათა სიდიდეების განსაზღვრა, როცა $k \neq m$.

ამისათვის (5.25)–(5.27)-დან შევნიშნოთ, რომ

$$PRO_m(\overline{P}_k) - \mu_m = a_m \cdot \overline{P}_k - \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot {}_{t-1}p_x \cdot P_t = a_m \cdot \left(\overline{P}_k - \overline{P}_m\right), \tag{5.28}$$

საიდანაც ცხადია, რომ მოგებათა სიდიდეების ყოფაქცევა არსებითად დამოკიდებულია $\{\overline{P}_t\}$ (და შესაბამისად, $\{P_t\}$) მიმდევრობის ყოფაქცევაზე.

შევნიშნოთ, რომ (5.22)-დან სამართლიანია უტოლობა

$$\min_{1 \le t \le m} P_t \le \overline{P}_m \le \max_{1 \le t \le m} P_t. \tag{5.29}$$

(5.29)-დან გამომდიანარეობს, რომ

1) თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა ზრდადია, მაშინ $\overline{P}_m \le P_m$

და 2) თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა კლებადია, მაშინ $\overline{P}_m \ge P_m$.

(5.24)-დან კი, გვაქვს

$$\overline{P}_{m+1}-\overline{P}_m=(P_{m+1}-\overline{P}_{m+1})\cdot\frac{a_{m+1}-a_m}{a_m}. \qquad (5.30)$$

რადგან a_m ზრდადია m-ით, (5.30)-დან გამომდინარე, $P_{m+1}-\overline{P}_{m+1}$ და $\overline{P}_{m+1}-\overline{P}_m$ სხვაობებს აქვთ ერთნაირი ნიშნები. თუ დავუბრუნდებით ზემოთ აღნიშნულ 1) და 2) მტკიცებულებებს, მაშინ მონოტონური $\{P_t\}$ მიმდევრობებისათვის აღმოვაჩენთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

დებულება1:

1) თუ ზრდადია $\{P_t\}$ მიმდევრობა, მაშინ ზრდადია $\{\overline{P}_t\}$ მიმდევრობაც;

2) თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა კლებადია, მაშინ კლებადია $\{\overline{P}_t\}$ მიმდევრობაც.

დავუბრუნდეთ (5.28)-ს, რომელიც გადავწეროთ ასე:

$$PRO_m(x)=\mu_m+a_m\cdot\left(x-\overline{P}_m\right)=a_m\cdot\left(x-\nu\cdot\overline{C}_m\right), \qquad (5.31)$$

სადაც

$$\overline{C}_m\equiv\frac{\sum_{t=1}^{m}\nu^{t-1}\cdot{}_{t-1}p_x\cdot C_t}{a_m}=(1+i)\cdot(\overline{P}_m-\mu_m/a_m). \qquad (5.32)$$

როგორც ვხედავთ, $PRO_m(x)$ წარმოადგენს x-ის წრფივ ფუნქციას.

მოგებათა (5.31) გამოსახულება გვიჩვენებს თუ რამდენად განსხვავებული იქნება m-ური წლის ბოლოს მოგების საშუალო სიდიდე წინასწარ დასახელებული სასურველი მნიშვნელობისაგან, თუკი მუდმივ პრემიად ავიღებთ ამ წლის შესაბამისი მუდმივი პრემიისაგან განსხვავებულ რაიმე სხვა სიდიდეს (მაგალითად, x-ს ან რომელიმე $\overline{P}_k$ სიდიდეს).

დებულება1-დან და (5.31)-დან დავასკვნით, რომ

დებულება2:

1) თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა ზრდადია, მაშინ

$$PRO_m(\overline{P}_k)\le\mu_m,\quad k\le m \quad \text{და} \quad PRO_m(\overline{P}_k)>\mu_m,\quad k>m. \qquad (5.33)$$

2) თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა კლებადია, მაშინ

$$PRO_m(\overline{P}_k) \ge \mu_m, \quad k \le m \quad \text{და} \quad PRO_m(\overline{P}_k) < \mu_m, \quad k > m. \tag{5.34}$$

(5.33)-დან კერძოდ ვღებულობთ, რომ თუ $\{P_t\}$ მიმდევრობა ზრდადია, მაშინ ნებისმიერი $1 \le m \le n$-თვის

$$PRO_m(\overline{P}_1) \le \mu_m \le PRO_m(\overline{P}_n). \tag{5.35}$$

(5.32)-ის უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, რომ $PRO_m(\nu \cdot \overline{C}_m) = 0$ და $PRO_m(x) \ge 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \ge \nu \cdot \overline{C}_m$.

მეორეს მხრივ, თუ დავუბრუნდებით (5.25)-ს და გადავწერთ მას ასეთი ფორმით

$$PRO_m(P_1, P_2, ..., P_m) = \sum_{t=1}^{m} \nu^{t-1} \cdot {}_{t-1}p_x \cdot P_t - \nu \cdot \overline{C}_m \cdot a_m, \tag{5.36}$$

მაშინ (5.24)-ის მიხედვით,

$$P_m^0 \equiv \nu \cdot C_m = \nu \cdot \frac{\overline{C}_m \cdot a_m - \overline{C}_{m-1} \cdot a_{m-1}}{a_m - a_{m-1}} \tag{5.36}$$

და ამ ტოლობით განმარტებული მიმდევრობა ერთადერთია, რომლისათვისაც

$$PRO_m(P_1^0, P_2^0, ..., P_m^0) \equiv 0. \tag{5.37}$$

მაშასადამე, (5.36) წარმოადგენს პრემიათა $\{P_t\}$ ნაკადის არჩევის გარკვეულ “ორიენტირს “: თუ ჩვენ გვინდა, რომ რომელიმე (მაგალითად, m-ური) წლის ბოლოს ჯამური მოგება არ იყოს უარყოფითი, მაშინ ამ წლის ჩათვლით პრემიების $(P_1, P_2, ..., P_m)$ მიმდევრობა უნდა ავიღოთ ისეთი, რომლის t-ური (ყოველი) კომპონენტი, $1 \le t \le m$, აკმაყოფილებს პირობას:

$$P_t \ge P_t^0. \tag{5.38}$$

(5.36)-ით განმარტებულ პრემიათა მიმდევრობას შეიძლება ეწოდოს “მინიმალურ” ბრუტო პრემიათა მიმდევრობა.

პრემიათა $\{P_t\}$-ნაკადის ჯამურ მოგებათა $\{\mu_t\}$ ვექტორით მოცემის პროცედურა ასევე რეალიზებულია Excel-ის ფორმატში (იხ. დანართი II).

6. რეზერვების შემოღება

სადაზღვევო კომპანიის გადამხდელუნარიანობის უზრუნველ-საყოფად გამოიყენება რეზერვირება, რაც იმას ნიშნავს, რომ დაზღვევის ზედამხედველობის სამსახურის მიერ შემუშავებული მოთხოვნების შესაბამისად ყოველი ɟ-ური სადაზღვევო წლის ბოლოს ხდება ${}_tV$ თანხების რეზერვში გადადება, რომელიც შემდგომში ახალ შემოსულ პრემიებთან ერთად გამოიყენება ვალდებულების გასასტუმრებლად. ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ ${}_tV$ რეზერვი იქმნება t-ური წლის ვალდებულების გასტუმრების შემდეგ და $(t+1)$-ე წლის შესაბამისი სადაზღვევო პრემიების შემოსვლამდე. რეზერვი იქმნება ყოველი ცალკეული პოლისისთვის და ბუნებრივია, რომ ${}_0V = {}_nV = 0$.

სიცოცხლის დაზღვევის განზოგადებული სქემის აღსაწერად, რომელიც რეზერვებსაც ითვალისწინებს, შემოვიღოთ t-ური წლის პირობითი ფულადი ნაკადის ცნება:

$$CF_t \equiv (P_t - e_t)(1+i) - D_t \cdot (1 - \Psi(x+t-1)) - S_t \cdot \Psi(x+t-1). \qquad (6.1)$$

t-ური წლის პირობითი ფულადი ნაკადის შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: ეს არის ერთ პოლისზე გადათვლილი t-ური სადაზღვევო წლის ბოლოსათვის მიღებული მოგება იმ პოლისებისთვის, რომლებიც ძალაშია t-ური წლის დასაწყისში (ანუ რომელთა მფლობელიც ცოცხალია t-ური წლის დასაწყისში).

როგორც ვხედავთ, (6.1) წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს და

$$E[CF_t] = (P_t - e_t)(1+i) - D_t \cdot q_{x+t-1} - S_t \cdot p_{x+t-1}, \qquad (6.2)$$

ხოლო

$$D[CF_t] = (D_t - S_t)^2 \cdot p_{x+t-1} \cdot q_{x+t-1}. \qquad (6.3)$$

აღსანიშნავია, რომ დისპერსია არ არის დამოკიდებული პრემიებსა და ადმინისტრაციულ ხარჯებზე.

პირობითი ფულადი ნაკადი მჭიდრო კავშირშია წინა პუნქტებში შემოღებულ კომპენსირებული რისკების მიმდევრობასთან. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი

წინადადება I. ყოველი $m=1,2,...,n$-თვის

$$R_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot CF_t \tag{6.4}$$

დამტკიცება:

$$\sum_{t=1}^{m} v^t \Psi_{t-1}(x) \times CF_t = \sum_{t=1}^{m} v^t \Psi_{t-1}(x)\left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t(1-\Psi(x+t-1)) - S_t \Psi(x+t-1)\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{m} v^t \left[(P_t - e_t)(1+i)\Psi_{t-1}(x) - D_t \Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)) - S_t \Psi_t(x)\right],$$

ვინაიდან

$$\Psi_{t-1}(x) \cdot \Psi(x+t-1) = \Psi_{t-1}(x) \times \Psi_t(x) = \Psi_t(x).$$

$$\Psi_t(x) = I\{K_x \geq t\} = I\{K_x \geq t-1\} \times I\{K_{x+t-1} \geq 1\} = \Psi_{t-1}(x) \times \Psi(x+t-1).$$

ე.ი., საბოლოოდ,

$$R_m = \sum_{t=1}^{m} v^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot CF_t .$$

დავუბრუნდეთ ზოგადი სქემის აღწერას და რეზერვების გათვალისწინებით განვაზოგადოთ პირობითი ფულადი ნაკადის ცნება, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$PRO_t \equiv CF_t + (1+i) \cdot {}_{t-1}V - \Psi(x+t-1) \cdot {}_tV. \tag{6.5}$$

ცხადია, რომ CF_t წარმოადგენს PRO_t-ს კერძო შემთხვევას ნულოვანი რეზერვების დროს. ამასთან, CF_t-საგან განსხვავებით PRO_t წარმოადგენს t-ური წლის განმავლობაში რეზერვების გათვალისწინებით მიღებულ და ამ წლის ბოლოს დაფიქსირებულ შემოსავალს იმ პოლისზე, რომელიც ძალაშია წლის დასაწყისში.

(6.5)-ით განმარტებულ $\{PRO_t\}_{t=1,...,n}$ ვექტორს ვუწოდოთ მოცემული პოლისის შესაბამისი მოგების ვექტორი.

ზემოთ მოყვანილი წინადადება I-ის მსგავსად, ამ შემთხვევაში m-ური ($m = 1,2,\ldots,n$) წლის კომპენსირებულ რისკს აქვს შემდეგი სახე:

$$R_m^V \equiv \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot PRO_t =$$

$$= \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot \left[\Psi_{t-1}(x)(P_t - e_t + {}_{t-1}V)(1+i) - D_t \Psi_{t-1}(x)(1-\Psi_t(x)) - S_t \Psi_t(x) - \Psi_t(x)_t V\right]. \qquad (6.6)$$

აღვნიშნოთ

$$\sigma_t \equiv \Psi_{t-1}(x) \cdot PRO_t, \qquad (6.7)$$

ამიტომ

$$R_m^V = \sum_{t=1}^{m} \nu^t \cdot \sigma_t .$$

საინტერესოა შემდეგი

წინადადება **II**. პოლისის ვადის ამოწურვის მომენტში კომპენ-სირებული რისკი არ არის დამოკიდებული რეზერვირების წესზე, ანუ

$$R_n^V = R_n^0 . \qquad (6.8)$$

დამტკიცება: (6.5)-ისა და ${}_0V = {}_nV = 0$ ტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\sum_{t=1}^{n} \nu^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot PRO_t = \sum_{t=1}^{n} \nu^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot CF_t + \sum_{t=1}^{n} \nu^{t-1} \Psi_{t-1}(x) \cdot {}_{t-1}V - \sum_{t=1}^{n} \nu^t \Psi_t(x) \cdot {}_tV =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \nu^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot CF_t + {}_0V - \nu^n \cdot \Psi_n(x) \cdot {}_nV = \sum_{t=1}^{n} \nu^t \cdot \Psi_{t-1}(x) \cdot CF_t .$$

ამ წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ პოლისის გაცემის მომენტისათვის პოლისიდან მოსალოდნელი მოგება არ არის დამოკიდებული რეზერვირების წესზე.

აღვნიშნოთ

$$\overline{\sigma}_t \equiv E\sigma_t . \qquad (6.9)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\overline{\sigma}_t = {}_{t-1}p_x \cdot E[PRO_t] = {}_{t-1}p_x \cdot \overline{PRO_{t.}} \qquad (6.10)$$

მართლაც, რადგან

$$\sigma_t = \Psi_{t-1}(x) \times$$

$$\times\left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t + (D_t - S_t)\cdot\Psi(x+t-1) + (1+i)\cdot{}_{t-1}V - \Psi(x+t-1)\cdot{}_t V\right] =$$

$$= \Psi_{t-1}(x)\cdot\left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t + (1+i)\cdot{}_{t-1}V + (D_t - S_t - {}_tV)\cdot\Psi(x+t-1)\right] =$$

$$= \Psi_{t-1}(x)\cdot\left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t + (1+i)\cdot{}_{t-1}V\right] + \Psi_t(x)\cdot(D_t - S_t - {}_tV)$$

და

$$p_{x+t-1} = \frac{{}_t p_x}{{}_{t-1}p_x}, \qquad (6.11)$$

გვაქვს

$$E\sigma_t = {}_{t-1}p_x \cdot\left[(P_t - e_t)(1+i) - D_t q_{x+t-1} - S_t p_{x+t-1} + (1+i)\cdot{}_{t-1}V - p_{x+t-1}\cdot{}_t V\right] = {}_{t-1}p_x \cdot \overline{PRO}_t\,.$$

ცხადია, რომ (5.8)-ის ანალოგიური ძირითადი განტოლება ამ შემთხვევაში ასე გამოიყურება:

$$ER_n^V = \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot \overline{\sigma}_t = \sigma\,. \qquad (6.12)$$

გასაგებია, რომ შესაძლებელია წინა პუნქტებში მიღებულის ანალოგიური ფორმულების გამოყვანა (შესაბამისი ცვლილებებით), რაც გარკვეული აზრით იქნებოდა ამ ფორმულების ხელახლა გამეორება. ამდენად, ჩვენ მხოლოდ დანართის სახით მოგვყავს მათი კომპიუტერული რეალიზაცია (იხ. დანართი III).

7. რეზერვირების მეთოდები

როგორც გვახსოვს,

$$\overline{PRO_t} = E[CF_t] + (1+i)\cdot{}_{t-1}V - p_{x+t-1}\cdot{}_tV\,, \qquad (7.1)$$

რაც საშუალებას გვაძლევს რეზერვების მოცემული მიმდევრობისათვის გამოვთვალოთ ყოველი სადაზღვევო წელიწადის საშუალო ფულადი

ნაკადი. გასაგებია, რომ არასწორი რეზერვების არჩევას შეიძლება მოჰყვეს უარყოფითი ფულადი ნაკადების გაჩენა. ამის თავიდან ასაცილებლად მნიშვნელოვანია სასურველი ფულადი ნაკადების შესაბამისი რეზერვების დასახელება, რაც მათემატიკურად ნიშნავს (7.1)-ის, როგორც $\{_tV\}$-ს მიმართ განტოლების ამოხსნას, ანუ $\{_tV\}$-ს გამოსახვას $\overline{PRO_t}$ -ებით.

ამ განტოლებიდან $_tV$-ს ამოხსნა იმ ტექნიკურ სიძნელეს აწყდება, რომ (7.1) არის ცვლადკოეფიციენტებიანი რეკურენტული განტოლება. ეტყობა, ამ გარემოებითაა გამოწვეული ის, რომ პრაქტიკაში გავრცელებულია სხვადასხვა მეთოდი, რომელიც სასურველი $\overline{PRO_t}$ -ებისათვის რეზერვების შერჩევის საშუალებას იძლევა.

წინამდებარე ნაშრომში ეს პრობლემა გადაწყვეტილია (7.1) განტოლების ცხადად ამოხსნის გზით (იხ. თეორემა ქვემოთ). თუმცა, ვიდრე დავამტკიცებდეთ ამ შედეგს, მოვიყვანოთ პრაქტიკაში გავრცელებული რეზერვირების ორი მეთოდი.

განვიხილოთ რეზერვირების პირველი მეთოდი, რომელსაც განულების მეთოდი ეწოდება.

დავუშვათ რომ t-ს ის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც CF_t უარყოფითია, არის m. ავიღოთ $_mV = 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ PRO_m უდრის ნულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$0 = CF_m + (1+i)_{m-1}V, \qquad (_mV = 0) \tag{7.2}$$

საიდანაც

$$_{m-1}V = -\frac{CF_m}{1+i}. \tag{7.3}$$

აქ ${}_{m-1}V$ არის $(m-1)$ მომენტში მოცემული რეზერვი და იგი დადებითია, რადგან ჩვენი არჩევის თანახმად m არის ის ბოლო წელი, როდესაც CF_t უარყოფითია.

ახლა ვნახოთ, თუ რა გავლენას ახდენს წლის ბოლოსათვის ${}_{m-1}V$ რეზერვის შემოღება $(m-1)$ წლის ფულად ნაკადზე.

თუ $(m-2)$ მომენტისათვის რეზერვი არ გვაქვს, ანუ (7.1) ტოლობაში $t=m-1$ და ${}_{m-2}V=0$, მაშინ $(m-1)$ წლის ფულადი ნაკადი მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\overline{PRO}_{m-1}=CF_{m-1}-p_{x+m-2}\cdot{}_{m-1}V=CF_{m-1}+\frac{CF_m}{1+i}\cdot p_{x+m-2}\,, \tag{7.4}$$

ასე რომ, თუ $\overline{PRO}_{m-1}$ არის უარყოფითი, იმისათვის რომ $(m-1)$ წელს არ გვქონდეს უარყოფითი ფულადი ნაკადი, $(m-1)$ წლის დასაწყისში ანუ $(m-2)$ მომენტში უნდა შევქმნათ რეზერვი. ვთქვათ ეს რეზერვია ${}_{m-2}V$, მაშინ ფულადი ნაკადი $(m-1)$ წელს იქნება

$$\overline{PRO'}_{m-1}=CF_{m-1}-p_{x+m-2}\cdot{}_{m-2}V+(1+i)\cdot{}_{m-2}V=\overline{PRO}_{m-1}+(1+i)\cdot{}_{m-2}V\,.$$

(7.5)

$\overline{PRO'}_{m-1}$ უდრის ნულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$${}_{m-2}V=-\frac{\overline{PRO}_{m-1}}{1+i}\,, \tag{7.6}$$

რომელიც უკვე არის დადებითი.

ეს არის ის რეზერვი, რომელიც მოვითხოვეთ $(m-1)$ წლის დასაწყისში იმისათვის, რომ გაგვენულებინა იმ წლის უარყოფითი ფულადი ნაკადი. ეს პროცედურა შეიძლება გავაგრძელოთ მანამ, სანამ თავიდან არ მოვიცილებთ უარყოფით ფულად ნაკადებს.

განვიხილოთ რეზერვირების კიდევ ერთი მეთოდი, რომელსაც ალტერნატივის არჩევის მეთოდი ეწოდება და რომელიც გულისხმობს ფულადი ნაკადის მიხედვით სასურველი რეზერვის შერჩევას.

დავუშვათ, რომ გვაქვს ორი ალტერნატიული $\left\{{}_tV^1\right\}$ და $\left\{{}_tV^2\right\}$ $(t = 0,1,\ldots n)$ რეზერვი. წინასწარ განსაზღვრული $\left\{{}_tV^k\right\}$ $(k = 1,2)$ რეზერვისათვის $\overline{PRO_t^k}$ იყოს t-ური წლის მოგება იმ პოლისისათვის, რომელიც ძალაშია წლის დასაწყისში. (7.1) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\overline{PRO_t^2} = CF_t + (1+i)_{t-1}V^2 - p_{x+t-1}\cdot_t V^2. \tag{7.7}$$

და

$$\overline{PRO_t^1} = CF_t + (1+i)_{t-1}V^1 - p_{x+t-1}\cdot_t V^1. \tag{7.8}$$

სხვაობა ამ ორ მოგებას შორის იქნება

$$\Delta(\overline{PRO_t}) = \overline{PRO_t^2} - \overline{PRO_t^1} = (1+i)\cdot\left[{}_{t-1}V^2 - {}_{t-1}V^1\right] + p_{x+t-1}\left[{}_tV^2 - {}_tV^1\right]. \tag{7.9}$$

ე.ი.,

$$\Delta(\overline{PRO_t}) = (1+i)\cdot\Delta\left({}_{t-1}V\right) - p_{x+t-1}\cdot\Delta\left({}_tV\right). \tag{7.10}$$

თუ ამ ბოლო ტოლობას ჩავწერთ რეზერვების ენაზე, მივიღებთ, რომ

$$\Delta\left({}_{t-1}V\right) = \frac{\Delta(\overline{PRO_t}) + p_{x+t-1}\cdot\Delta\left({}_tV\right)}{1+i}. \tag{7.11}$$

თუ $\Delta\left({}_{t-1}V\right)$ არის t-ური წლის ბოლოსათვის მიღებული რეზერვების ცვლილება და t-ური წლის განმავლობაში გვსურს უზრუნველყოთ მოგებებს შორის ცვლილება, ამისათვის უნდა განვსაზღვროთ ცვლილება რეზერვებს შორის t-ური წლის დასაწყისში.

ამ მეთოდებით მიღებული შედეგები რეალიზებულია Excel-ის ცხრილებში (იხ. დანართი IV).

დავუბრუნდეთ ${}_tV$-ების $\overline{PRO_t}$-ების მეშვეობით ცხადად გამოსახვის საკითხს. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა: (7.1) განტოლების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$ {}_tV = (1+i)^t \cdot {}_0V - \frac{\sum_{k=1}^{t} (\overline{PRO}_k - E[CF_k]) \cdot \nu^k \cdot {}_{k-1}p_x}{\nu^t \cdot {}_t p_x} \tag{7.12} $$

დამტკიცება: როგორც (6.11)-დან გვახსოვს,

$$ p_{x+k-1} = \frac{{}_k p_x}{{}_{k-1} p_x}. $$

თუ ამ ტოლობას ჩავსვავთ (7.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$ b_k \cdot {}_{k-1}p_x = (1+i) \cdot H_{k-1} - H_k \tag{7.13} $$

სადაც

$$ b_k \equiv \overline{PRO}_k - E[CF_k] $$

და

$$ H_k = {}_kV \cdot {}_k p_x . $$

როგორც ვხედავთ, განსხვავებით (7.1)-გან, (7.13) წარმოადგენს მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ რეკურენტულ განტოლებას. ამიტომ სირთულეს აღარ წარმოადგენს მისი ამოხსნა. გადავწეროთ (7.13) შემდეგი ფორმით:

$$ H_k - (1+i) \cdot H_{k-1} = -b_k \cdot {}_{k-1}\, p_x , $$

საიდანაც მივიღებთ

$$ \nu^k H_k - \nu^{k-1} H_{k-1} = -b_k \cdot {}_{k-1}\, p_x \cdot \nu^k . $$

თუ ავჯამავთ უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარეს, მივიღებთ:

$$ \nu^k H_k - H_0 = -\sum_{k=1}^{t} b_k \cdot {}_{k-1}\, p_x \cdot \nu^k $$

საიდანაც აღნიშვნების უკან დაბრუნებითა და იმის გათვალისწინებით, რომ ${}_0p_x = 1$, საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას:

$$ {}_tV = (1+i)^t \cdot {}_0V - \frac{\sum_{k=1}^{t} (\overline{PRO}_k - E[CF_k]) \cdot \nu^k \cdot {}_{k-1}p_x}{\nu^t \cdot {}_t p_x} . $$

თუ $_0V = 0$, როგორც ეს ჩვენს შემთხვევაშია, მაშინ (7.12) ამონახსნი ასეთ სახეს ღებულობს:

$$_tV = \frac{\sum_{k=1}^{t} (\overline{PRO}_k - E[CF_k]) \cdot v^k \cdot {}_{k-1}p_x}{v^t \cdot {}_t p_x} . \tag{7.14}$$

ზემოთ მოყვანილი განულებისა და ალტერნატივის არჩევის მეთოდებისაგან განსხვავებით, ამ ფორმულაზე დაყრდნობით ჩვენ სრული თავისუფლება გვაქვს სასურველი $\overline{PRO_t}$-ების მიმდევრობისათვის მარტივად მივიღოთ $_tV$ რეზერვების შესაბამისი საჭირო მიმდევრობა, რაც რეალიზებულია Excel-ის ფორმატში (იხ. დანართი IV). მაშასადამე, ეს ფორმულა შეიძლება გააზრებულ იქნას, როგორც განულებისა და ალტერნატივის არჩევის მეთოდების განზოგადება.

8. შედეგები

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები.

1) შემუშავებულია ვადიანი სიცოცხლის დაზღვევის ზოგადი მოდელი და ამ მოდელის ფარგლებში შემუშავებულია მომგებიანობის ტესტირების სრული პროცედურა და მისი კომპიუტერული რეალიზაცია. კერძოდ ეს პროცედურა საშუალებას იძლევა:

ა) პრემიების ნებისმიერი ცვლადი ნაკადისათვის განვსაზღვროთ მომავალი საშუალო წლიური და ჯამური მოგებები;

ბ) დავადგინოთ პრემიების ისეთი ნაკადი ან/და მუდმივი ყოველწლიური პრემია, რომელიც უზრუნველყოფს სასურველ მომგებიანობას.

გ) დავადგინოთ მომავალი საშუალო წლიური და ჯამური მოგებები რეზერვების მოცემული ნაკადისათვის და შევარჩიოთ ისეთი რეზერვები, რომლებიც უზრუნველყოფს სასურველ მომავალ ფულად ნაკადებს.

2) ამოხსნილია ცვლადკოეფიციენტებიანი რეკურენტული განტოლება, რის შედეგადაც მიღებულია ცხადი ფორმულა, რომელიც გამოსახავს რეზერვების ნაკადს სასურველი ყოველწლიური ფულადი ნაკადების მეშვეობით. ამ ფორმულის გამოყენება გაცილებით უფრო მოხერხებულია, ვიდრე იმ კერძო მეთოდებისა, რომლებიც პრაქტიკაში გამოიყენება.

დანართი I

I ვარიანტი

I ვარიანტში არის 3 ცხრილი: 1.1; 1.2; 1.3;

ცხრილ (1.1)-ში დაზღვევის პერიოდი n=5 წელს, დაზღვეულის ასაკი x=50 წელს, გარდაცვალებისა და გადარჩენის სადაზღვევო თანხების მიმდევრობები, შესაბამისად $\{D_t\}$=5000, 5200, 5500, 5800, 6000; $\{S_t\}$=500, 520, 550, 580, 600; წლიური საპროცენტო განაკვეთი i=7%, ხოლო ამ საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი დისკონტირების კოეფიციენტი v=0.93458. საწყისი ხარჯები e_t=300ლ, ხოლო შემდგომი ხარჯები კი წელიწადში 30 ლარის ტოლია. ეს ის ხარჯებია, რომელიც მეორე და ასევე შემდგომი სადაზღვევო წლების დასაწყისში წარმოიშვება. პრემიების საწყისი $\{P_t\}$ ნაკადი აღებულია ნებისმიერად, ამ შემთხვევაში 700ლ, 680ლ, 660ლ, 580ლ, 560ლ და მოცემული პრემიების ნაკადისათვის გამოთვლილია როგორც ყოველწლიურ საშუალო მოგებათა $\{\beta_t\}$ ვექტორი, ასევე ჯამური მოგება σ.

ჩვენი მონაცემებიდან გამომდინარე β_t შემდეგი სიდიდეების მიმდევრობას წარმოადგენს: β_t=-127.90; -114.45; 58.00; -58.98; -101.40, ხოლო ჯამური მოგების დღევანდელი ღირებულება –89.52 ლარის ტოლია.

ცხრილ (1.2)-ში, სასურველი ჯამური მოგების დაგეგმვით, რომელიც ამ შემთხვევაში იგივე –89.52 ლარს შეადგენს, გამოანგარიშებულია მუდმივი $\overline{P_n}$ პრემია, რომელიც 642 ლარის ტოლია. ეს ნიშნავს შემდეგს: ცხრილი (1.1)-ში პრემიების $\{P_t\}$ ნაკადის ნაცვლად რომ აგვეღო 642 ლარის ტოლი მუდმივი პრემია, შედეგად კვლავ მოგვცემდა –89.52 ლარის ტოლ მოგებას.

ცხრილი (1.3) კი გვიჩვენებს თუ როგორი პრემიების შემთხვევაში იქნებოდა σ და ყოველწლიური საშუალო β_t მოგებები, t=1,2,3,4, მოცემული (წინასწარ დასახელებული, სასურველი) სიდიდეების ტოლი (იხ. (3.14)).

როგორც ვხედავთ, თუ ცხრილ (1.3) –ში ავიღებთ σ=-89.52 და $\{\beta_t\}$–ების t=1,2,3,4 იმავე მიმდევრობას, რაც ცხრილ 1.1-შია, მივიღებთ პრემიების ზუსტად საწყის მიმდევრობას: $\{P_t\}$=700, 680, 660, 580, 560.

II ვარიანტი

II ვარიანტში შესაბამისად გვაქვს 3 ცხრილი: 2.1; 2.2; 2.3;

ვნახოთ რა როლს თამაშობს ცხრილ (2.1)-ში წლიური საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც ამ შემთხვევაში 5%-ის ტოლია. როგორც ვხედავთ, საშუალო წლიური $\{\beta_t\}$ მოგებების მიმდევრობის მნიშვნელობებია: β_t =-139.90; 101.61; 45.71; -69.56; -111.46, ხოლო ჯამური მოგების დღევანდელი ღირებულება –142.35 ლარს შეადგენს, რაც იმას ნიშნავს, რომ საპროცენტო განაკვეთის შემცირებამ გამოიწვია (იხ. ცხრილი 1.1) β_t მიმდევრობის წევრების შემცირება და შედეგად σ ჯამური მოგების შემცირებაც. მაშასადამე, σ აღმოჩნდა საპროცენტო განაკვეთის ზრდადი ფუნქცია. რაც შეეხება $\overline{P}_n$ პრემიას, ცხრილი 2.2-დან ვხედავთ, რომ i=5%-ის დროს $\overline{P}_n$=653ლარს, ნაცვლად $\overline{P}_n$=642ლარისა, i=7%-ის დროს.

მაშასადამე, $\overline{P}_n$ აღმოჩნდა საპროცენტო განაკვეთის კლებადი ფუნქცია.

საყურადღებოა, რომ σ-სა და $\overline{P}_n$-ის, როგორც საპროცენტო განაკვეთის ფუნქციათა ეს ყოფაქცევები არ არის ცალსახად ერთნაირი დაზღვევის ყველა სახეობისათვის.

ცხრილი 2.3 საშუალებას გვაძლევს დავრწმუნდეთ ასეთსავე ეფექტში პრემიების ნაკადისთვისაც: σ-სა და $\{\beta_t\}$ ვექტორის იმავე მნიშვნელობებისთვის, რაც I ვარიანტის ცხრილ 1.1-შია. σ=-89.52 და β_t =-127.90; 114.45; 58.00; -58.98-თვის, პრემიების ნაკადი გამოდის: $\{P_t\}$=708, 692, 672, 590, 578, ნაცვლად $\{P_t\}$=700, 680, 660, 580, 560-სა.

III ვარიანტი

III ვარიანტში გვაქვს 3.1; 3.2; 3.3 ცხრილები:

ცხრილი 3.1-ში მოძებნილია ის მინიმალური საპროცენტო განაკვეთი, რომლისთვისაც σ ჯამური მოგება არაუარყოფითია. როგორც ვხედავთ, i=10.9925%-ის დროს σ=0.

ცხრილ 3.2-ში საინტერესოა, რა მუდმივი $\overline{P_n}$ პრემია უნდა დაგვენიშნა, რომ ჯამური მოგება განულებულიყო. როგორც ვხედავთ, 663 ლარი არის ის მუდმივი პრემია, რომელიც აკმაყოფილებს ჩვენს პირობას. შევნიშნოთ, რომ სწორედ მოცემული პრემია არის მინიმალური ბრუტო პრემია: პრემიის უფრო პატარა მნიშვნელობისათვის σ უარყოფითია. მართლაც, თუ შევადარებთ პრემიის ამ მნიშვნელობას $\overline{P_n}$ პრემიის I ვარიანტის ცხრილი 1.2-ის მნიშვნელობას (როცა σ=-89.52), დავინახავთ, რომ 642<663.

ცხრილი 3.3-დან ჩანს, რომ ყველა პრემია იგივე დარჩა, გარდა ბოლო წლის პრემიისა: ის გაიზარდა 560-დან 684 ლარამდე.

მაშასადამე, ცალკეული პრემიების სიდიდეები, როგორც σ-ს ფუნქციები, წარმოადგენს ზრდად ფუნქციებს.

სამივე ვარიანტში მოყვანილი განმარტებები იგივეა დაზღვევის დანარჩენი (კერძო) სახეობებისათვის. ამდენად, ჩვენ მოგვყავს მხოლოდ მათი შესაბამისი Excel-ის ცხრილები შემდეგ დაშვებებში:

Pure Endowment			Term Life			Variable Life			Credit Life		
e_t	D_t	S_t	e_t	D_t	S_t	e_t	D_t	S_t	e_t	D_t	S_t
100	0	0	20	1000	0	20	200	0	20	1000	0
10	0	0	2	1000	0	2	400	0	2	800	0
10	0	0	2	1000	0	2	600	0	2	600	0
10	0	0	2	1000	0	2	800	0	2	400	0
10	0	1000	2	1000	0	2	1000	0	2	200	0

შენიშვნები:

1. Term Life-ში გვაქვს ცხრილების ოთხი ვარიანტი: პირველი სამი იგივე, რაც გვაქვს ზოგად მოდელში, ხოლო მეოთხე ვარიანტის დამატება განპირობებულია შემდეგი გარემოებების გამო: III ვარიანტის ცხრილ 3.3-ში σ=0 პირობის შესაბამისი პრემიათა მიმდევრობის გამოთვლისას აღმოჩნდა, რომ ბოლო წლის პრემია უარყოფითია (ტოლია –4-ის). ეს კი ცხადია, იმას უნდა ნიშნავდეს, რომ წინა წლის პრემიების სიდიდეები აღებულია საკმარისზე დიდი. ამიტომ, შესაძლებელია ამ პრემიების დაწევა. მაგალითად, თუ პირველი წლის პრემიას დავაწესებთ P_1=25 (ნაცვლად 30-ისა), მაშინ აღმოჩნდება, რომ σ=5.50, $\overline{P}_n$=19.64 და σ=0 პირობისათვის საჭირო პრემიათა მიმდევრობა იქნება 25; 30; 20; 15; 2 (იხილეთ ვარიანტი IV-ის ცხრილი 4.1 და 4.3).

2. Variable და Credit Life-ში გვაქვს ცხრილების მხოლოდ პირველი ვარიანტები.

დანართი II

ამ დანართის შესაბამისი ცხრილის მარცხენა კუთხეში მოცემულია მოდელის პარამეტრები, სადაც $\{\mu_k\}$ წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას პირველი წევრით $\mu_1 = 20$ და სხვაობით $h = 30$.

პროგრამა ითვლის (5.16), (5.18), (5.22), (5.23), (5.25), (5.27), (5.32), (5.36) ფორმულებით მოცემულ საძიებელ სიდიდეებს.

მოცემულ სასურველ ჯამურ მოგებათა ვექტორით ითვლება (5.17) განტოლებათა სისტემის $\{P_k\}$ ნაკადი, რომლისათვისაც ნაჩვენებია, რომ $PRO_k(P_1, P_2,\ldots, P_k) = \mu_k$, სადაც $PRO_k(P_1, P_2,\ldots, P_k)$ ითვლება (5.25) ფორმულით.

მონაცემებზე დაყრდნობით გამოანგარიშებული ხარჯების დღევანდელ ღირებულებათა $\{C_k\}$ ნაკადით გამოთვლილია ასევე მინიმალურ ბრუტო პრემიათა $\{P_{min,k}\}$ მიმდევრობა, რომელიც დარდება $\{P_k\}$ მიმდევრობას (იხ. ნახ.1).

$\{P_k\}$ ნაკადის საშუალებით გამოთვლილია მუდმივ პრემიათა $\{\overline{P}_k\}$ ნაკადი; ანალოგიურად, $\{C_k\}$ ნაკადის საშუალებით გამოთვლილია ხარჯების $\{\overline{C}_k\}$ ნაკადი და შედარებულია $\Delta_{k1} = P_k - C_k$ და $\Delta_{k2} = \overline{P}_k - \overline{C}_k$ სხვაობათა ვექტორები. ნახატი 2-დან ჩანს, რომ პირველი სხვაობა ინარჩუნებს ექსპონენციალურ ფორმას, მაშინ როცა მეორე თითქმის წრფივია, საკმარისად დაბალი საკუთხო კოეფიციენტით.

ბოლოს, გამოთვლილია $PRO_k(\overline{P}_m)$ მოგებები სხვადასხვა m-თვის და შედარებულია $\{\mu_k\}$ მოგებებთან. როგორც ნახატი 3-დან ჩანს, $\overline{P}_n$ მუდმივი პრემიის დაწესება მოიტანს მაქსიმალურ $PRO_k(\overline{P}_n)$ მოგებებს,

რომლებიც ყველა k-თვის უფრო მაღალია, ვიდრე μ_k. რაც შეეხება დანარჩენ $\overline{P}_m$-ს, მათთვის k-ური წლის მოგება დაწყებული გარკვეული წლიდან, აღმოჩნდება μ_k-ზე ნაკლები; თუმცა, ამათ შორის შეიძლება ისეთი $\overline{P}_m$-ის არჩევაც, რომლისათვისაც $PRO_k(\overline{P}_m)$ მოგებები არაუარყოფითია ნებისმიერი k-თვის. ეს კი საშუალებას აძლევს კომპანიას დანიშნოს კლიენტისათვის უფრო ხელსაყრელი მუდმივი პრემია, ისე, რომ თვითონ არასოდეს დარჩეს წაგებაში.

III დანართი

ვარიანტი I

I ვარიანტის ცხრილების მონაცემები იგივეა, რაც იყო I დანართის I ვარიანტის ცხრილებში. დამატებით გვაქვს რეზერვების მიმდევრობა, რომელიც ამ შემთხვევაში ნულოვანია.

როგორც ვხედავთ, III დანართის სამივე ცხრილში შედეგები ემთხვევა I დანართის ცხრილების შედეგებს.

ვარიანტი II

ცხრილ 2.1-ში მონაცემები დავტოვოთ იგივე, რაც გვქონდა I ვარიანტის ცხრილ 1.1-ში, იმ განსხვავებით, რომ ნულოვანი რეზერვების ნაცვლად ავიღოთ ჩვენთვის სასურველი (ან მაგ. ზედამხედველობის სამსახურის მიერ მოთხოვნილი) რეზერვები, რომელიც შემდეგ მიმდევრობას წარმოადგენს: $\{_{t-1}V\}$=0, 0, 85, 150, 100, 0; როგორც ვხედავთ, $\{_{t-1}V\}$-ის სასურველმა მიმდევრობამ მოგვცა $\{\sigma_t\}$-ის შემდეგი მიმდევრობა: $\{\sigma_t\}$=-127.90; 31.57; 2.33; 0.53; 0.19. აქედან ჩანს, რომ რეზერვების შემოღებით ოდნავ გავაუმჯობესეთ $\{\sigma_t\}$ მოგებები, ხოლო ჯამურ $\{\sigma\}$ მოგებაზე ამან არანაირი გავლენა არ იქონია.

ცხრილ 2.2-ში შემოვიღოთ რეზერვების იგივე მიმდევრობა, რაც გვქონდა ცხრილ 2.1-ში და ვნახოთ, თუ რა მუდმივი $\overline{P_n}$ პრემიის დანიშვნაა საჭირო იმისათვის, რომ ჯამური მოგება საშუალოდ ნულის ტოლი მივიღოთ. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც

რეზერვები არ მოქმედებს მუდმივ $\overline{P_n}$ პრემიაზე და I ვარიანტის ცხრილი 1.2-ის მსგავსად აქაც 663 ლარის ტოლი მუდმივი პრემია გვჭირდება ჯამური მოგების საშუალოდ განულებისათვის.

ცხრილ 2.3-ში დავტოვოთ I ვარიანტის ცხრილი 1.3-ის $\{\sigma_t\}$-ები და ვნახოთ, პრემიათა როგორი ნაკადის დანიშვნა იქნება საჭირო მოგებათა მოცემული მიმდევრობისათვის.

როგორც ცხრილ 2.3-დან ჩანს, $\{P_t\}$=700, 758.427, 713.357, 522.208, 460 არის პრემიების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც გვაძლევს $\{\sigma_t\}$=-127.90; 114.45; 58.00; -58.98; -101.40 ტოლ მოგებებს.

IV დანართი

ვარიანტი I

მოცემულ ცხრილში გვაქვს მონაცემების შემდეგი ერთობლიობა: საწყისი ნულოვანი $\{_{t-1}V\}$ რეზერვები, პრემიათა მიმდევრობა: $\{P_t\}$=550, 520, 450, 350, 200; ხარჯების მიმდევრობა: $\{e_t\}$=200, 20, 20, 20, 20; $\{D_t\}$-ის მიმდევრობა: $\{D_t\}$=3000, 3200, 3400, 3600, 4000; $\{S_t\}$-ის მიმდევრობა: $\{S_t\}$=300, 320, 340, 360, 400; წლიური საპროცენტო განაკვეთი: i=5%. როგორც ვხედავთ, ნულოვანი რეზერვების შესაბამისი $\{PRO_t\}$-ია: $\{PRO_t\}$=33.96, 168.31, 71.55, -56.82, -260.27. როგორც ცხრილიდან ჩანს, იმისათვის რომ თავიდან ავიცილოთ უარყოფითი საშუალო წლიური მოგებები, ამისათვის უნდა გავანულოთ ისინი, რის შედეგადაც მივიღებთ რეზერვების სასურველ $\{D_{t-1}V\}$=0, 29.3, 201.6, 287, 247.9, 0 მიმდევრობას, რომელთა შესაბამისი მოგებები ასე გამოიყურება: $\{PRO_t\}$=5.03, 0, 0, 0, 0.

ვარიანტი II

II ვარიანტის ცხრილში უბრალოდ შევამოწმოთ, მოგვცემს თუ არა სასურველი $\{DPRO_t\}$-ის მიმდევრობა $\{\Delta_{t-1}V\}$ რეზერვების შესაბამის მიმდევრობას. როგორც ვხედავთ, ორივე ვარიანტის ცხრილებში შედეგები ემთხვევა ერთმანეთს, რაც გვარწმუნებს ორივე ცხრილის სამართლიანობაში.

ვარიანტი III

მოცემულ ცხრილში ნაჩვენებია წინა ვარიანტებში მიღებული შედეგები (7.12) ფორმულაზე დაყრდნობით. გარდა ამისა, ეს ფორმულა საჭირო რეზერვების გამოთვლის საშუალებას იძლევა მაშინაც კი, როცა ${}_0V \neq 0$ და ის განიხილება მოდელის პარამეტრად. მსგავს პრობლემას წინა ვარიანტებში აღწერილი მეთოდები საერთოდ არ ეხება.