ვექტორული არგუმენტის სარგებლიანობის ფუნქცია და მისი გამოყენება

გ. მახარაძე, ა. ომანაძე, ზ. ჭინჭარაული
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

§1 ამოცანის დასმა

1.1 წარმოვიდგინოთ სადაზღვევო კომპანია (შესაძლოა სხვა ფინანსური ინსტიტუტის განხილვაც), რომლის მთლიანი პორტფელი შედგება ორი ქვეპორტფელისაგან.

სარისკო სიტუაცია, რომელშიც იმყოფება კომპანია, აღინიშნება (S,F) სიმბოლოთი. S წარმოადგენს სადაზღვევო ფონდს, ანუ აკრეფილ ნეტო-პრემიებს და თავისუფალ რეზერვებს, ხოლო $F(x)-$ მთლიანი პორტფელის ერთიანი X ზარალის (ჯამური ზარალის) ალბათური განაწილების ფუნქციას:

$$F(x) = P(X \le x) \tag{1.1}$$

სადაზღვევო კომპანიას შეუძლია ზეგავლენა მოახდინოს სარისკო სიტუაციაზე, მაგ: შეცვალოს S და/ან $F(x)$. ცხადია კომპანიის მენეჯმენტის ამოცანაა რაიმე აზრით საუკეთესო სარისკო სიტუაციის შერჩევა.

1.2 იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს საუკეთესო სარისკო სიტუაციის შერჩევა აუცილებელია მათ სიმრავლეზე რაიმე დალაგების შემოღება. ცხადია ეს გულისხმობს მათ გაზომვას, სულ მცირე, რიგის სკალის მეშვეობით. [3]-ის გამოსვლის შემდეგ ამგვარი გაზომვის კლასიკურ საშუალებად იქცა ე.წ. „ფულის სარგებლიანობის" $u(x)$ ფუნქციის გამოყენება, ჩვენ მას მოკლედ სარგებლიანობის ფუნქციას ვუწოდებთ. ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $u(x)$ ზრდადია, ანუ მეტ ფულს მეტი სარგებლიანობა მოაქვს. თუმცა სულაც არ არის აუცილებელი რომ $u(x)$ იყოს წრფივი. რისკის თეორიაში განიხილავენ ამოზნექილ $\left(\dfrac{d^2u}{dx^2} < 0\right)$ ან ჩაზნექილ $\left(\dfrac{d^2u}{dx^2} > 0\right)$ უწყვეტ სარგებლიანობის ფუნქციებს, რომლებიც შესაბამისად ახასიათებენ ისეთ ინვესტორებს რომლებიც

ერიდებიან რისკს, ან პირიქით. სარგებლიანობის ფუნქციის ცნობილი მაგალითებია: $u(x) = \ln x$; $u(x) = 1 - e^{-x}$; $u(x) = ax - x^2$, $(x \le \frac{a}{2})$ და ა.შ.

1.3 თუ ცნობილია სადაზღვევო კომპანიის სარგებლიანობის ფუნქცია $u(x)$, მაშინ ნებისმიერ სარისკო სიტუაცია (S,F)-ს შევუსაბამოთ რიცხვი შემდეგი წესით:

$$U(S,F) = \int_0^\infty u(S-x)dF(x) \tag{1.2}$$

ცნობილია [2], რომ ეს შესაბამისობა სარისკო სიტუაციების წრფივად დალაგების საშუალებას იძლევა. (1.2) ფორმულით მოცემული დალაგება "უხეშია" იმ თვალსაზრისით, რომ იგი არ ითვალისწინებს ცალკეული ქვეპორტფელების სარისკო სიტუაციებს. მაგალითად შესაძლებელია, რომ ერთ-ერთი ქვეპორტფელი ცუდ მდგომარეობაში იყოს, მაგრამ მთლიანი პორტფელის სარისკო სიტუაციას მაღალი "რეიტინგი" აღმოაჩნდეს იმის ხარჯზე, რომ მეორე ქვეპორტფელი წარმატებული აღმოჩნდა. პრაქტიკულად გამართლებულია, რომ კომპანია ერთნაირად ზრუნავდეს სხვადასხვა მიმართულების განვითარებაზე და სარისკო სიტუაციის შეფასებისას ყურადღებას აქცევდეს არა მხოლოდ ჯამურ შედეგს, არამედ ცალკეული ქვეპორტფელების მდგომარეობებსაც.

ჩვენი კვლევის საგანს წარმოადგენს სწორედ ამგვარი მიდგომის მათემატიკური მოდელირება.

§ 2 ორგანზომილებიანი სარისკო სიტუაცია და შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

2.1 ამ ნაშრომში სიმარტივისათვის განიხილება ორგანზომილებიანი შემთხვევა: კომპანიის მთლიანი პორტფელი შედგება ორი ქვეპორტფელისაგან. პირველი მათგანი ფინანსირდება S_1 ფონდით, შესაბამისი ზარალის განაწილების ფუნქციაა $F_1(y)$, ხოლო მეორე ქვეპორტფელისთვის შესაბამისად S_2 და $F_2(z)$. აქ ჩვენ საქმე გვაქვს უკვე ორგანზომილებიან სარისკო სიტუაციასთან, რომელსაც $(S_1, F_1; S_2, F_2)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. დამატებით ვიგულისხმოთ, რომ ქვეპორტფელების ზარალები სტატისტიკურად ურთიერთ დამოუკიდებლებია, და რომ კომპანიას

გააჩნია ერთი და იგივე სარგებლიანობის ფუნქცია, როგორც ცალკეულ ქვეპორტფელებთან ასევე მთლიან პორტფელთან მიმართებაში. ბუნებრივია, რომ ყოველ $(S_1, F_1; S_2, F_2)$ ორგანზომილებიან სარისკო სიტუაციას შეესაბამებოდეს (S, F) ერთგანზომილებიანი სარისკო სიტუაცია, რომელშიც მთლიანი პორტფელი იმყოფება. ჩვენს მიერ წარმოდგენილ მოდელში ეს შესაბამისობა შემდეგნაირად მოიცემა

$$S = S_1 + S_2 \quad , \quad F(x) = F_1(y) * F_2(z) \tag{2.1}$$

სადაც „ * “ წარმოადგენს ნახვევის ოპერაციას. ცხადია რამოდენიმე ორგანზომილებიან სარისკო სიტუაციას შეიძლება ერთი და იგივე ერთგანზომილებიანი სარისკო სიტუაცია შეესაბამებოდეს.

შემოვიღოთ ორგანზომილებიანი სარისკო სიტუაციების კლასებად დაყოფა:

განსაზღვრება 2.1: ვიტყვით რომ $(S_1, F_1; S_2, F_2)$ და $(S_1', F_1'; S_2', F_2')$ მიეკუთვნება $(S \ , F)$ კლასს თუ (2.1) ფორმულებით მოცემული წესით მათ შეესაბამება ერთი და იგივე $(S \ , F)$.

ცხადია, რომ შემოღებული მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა (იგი რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია), ასე რომ ორგანზომილებიანი სარისკო სიტუაციების ერთობლიობა იყოფა თანაუკვეთ კლასებად.

2.2 ორგანზომილებიანი სარისკო სიტუაციების „გასაზომად“ შემოვიღოთ ორი ცვლადის სარგებლიანობის ფუნქცია $v(y, z)$, რომელიც განსაზღვრულია (y, z) ფულად ველზე. ამ მოდელში ჩვენ განვიხილავთ შემდეგი ტიპის ფუნქციებს:

$$v(y, z) = u(y) + u(z) \tag{2.2}$$

სადაც $u(y)$ და $u(z)$ ერთი ცვლადის სარგებლიანობის ფუნქციებია.

ამგვარი $v(y, z)$ ფუნქციები შეესაბამება ჩვენს მიერ ზემოთ გაკეთებულ დაშვებებს და ასევე გულისხმობს, რომ (y, z) ფულადი ველის y მიმართულებით სარგებლიანობის ცვლილება არ

არის დამოკიდებული მეორე კომპონენტზე და პირიქით, ვინაიდან შემოღებული $v(y,z)$-სთვის $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}=0$. ორგანზომილებიანი სარისკო სიტუაციების სარგებლიანობა მოიცემა შემდეგი წესით:

$$V(S_1,F_1;S_2,F_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty \big(u(y)+u(z)\big)dF_1(y)dF_2(z)=\int_0^\infty u(y)dF_1(y)+\int_0^\infty u(z)dF_2(z) \qquad (2.3)$$

ამ ფორმულის მიხედვით $$V(S_1,F_1;S_2,F_2)=U(S_1,F_1)+U(S_2,F_2) \qquad (2.4)$$

განსაზღვრება 2.2: თუ მოცემულია $(S_1,F_1;S_2,F_2)$ და $(\tilde{S}_1,\tilde{F}_1;\tilde{S}_2,\tilde{F}_2)$, შესაბამისად (S,F) და $(\tilde{S},\tilde{F})$ კლასებიდან, მაშინ ვიტყვით რომ $(S_1,F_1;S_2,F_2)$ ლექსიკოგრაფულად მეტია $(\tilde{S}_1,\tilde{F}_1;\tilde{S}_2,\tilde{F}_2)$-ზე (ჩავწერთ $(S_1,F_1;S_2,F_2)\succ(\tilde{S}_1,\tilde{F}_1;\tilde{S}_2,\tilde{F}_2)$)

თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

$U(S,F)>U(\tilde{S},\tilde{F})$ ან

თუ $U(S,F)=U(\tilde{S},\tilde{F})$, მაშინ $V(S_1,F_1;S_2,F_2)>V(\tilde{S}_1,\tilde{F}_1;\tilde{S}_2,\tilde{F}_2)$

ასეთი დალაგების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია გადავჭრათ, როგორც მთლიანი პორტფელის, ასევე ცალკეული ქვეპორტფელების, ოპტიმიზაციის ამოცანა. ცხადია შესაძლებელია ამ დალაგების განზოგადება უფრო მაღალ განზომილებებზე.

2.3 ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ამ მოდელის გამოყენება

1) ვთქვათ კომპანიას გააჩნია ორი ქვეპორტფელი, რომელთა ზარალის განაწილების ფუნქციებია:

$$F_1(y)=1-e^{-\alpha y} \quad \text{და} \quad F_2(z)=1-e^{-\beta z} \qquad (2.5)$$

სადაც $P_1=\frac{1}{\alpha}, V_1=\frac{1}{\alpha^2}$ და $P_2=\frac{1}{\beta}, V_2=\frac{1}{\beta^2}$ შესაბამისად $F_1(y)$ და $F_2(z)$-ის საშუალოები და დისპერსიებია. ერთგანზომილებიანი სარგებლიანობის ფუნქციაა:

$$u(x)=ax-x^2, \text{ სადაც } x\le\frac{a}{2} \qquad (2.6)$$

შესაბამისი ორგანზომილებიანი სარგებლიანობის ფუნქცია (2.2)-ის თანახმად იქნება:

$$v(y,z) = u(y) + u(z) = ay - y^2 + az - z^2 ,\ \text{სადაც}\ \ y,z \le \frac{a}{2} \tag{2.7}$$

მთლიანი პორტფელის ერთგანზომილებიანი სარისკო სიტუაციაა (S,F), სადაც $F(x)$ განისაზღვრება (2.1) ფორმულით. ხოლო S არის მარკეტინგული მოსაზრებებით მაქსიმალური თანხა, რომლის მოზიდვის საშუალებასაც იძლევა ბაზარი. აქედან გამომდინარე კომპანიას გადაჭრილი აქვს მთლიანი პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანა, რადგან მოცემული $F(x)$-ის დროს $U(S,F)$ მაქსიმალურია S-ის მაქსიმალური მნიშვნელობისათვის.

შევარჩიოთ ისეთი S_1 და S_2, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.1)-ს და $V(S_1,F_1;S_2,F_2)$ გამოსახულებას ანიჭებენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას. (2.3)-ის და (2.7)-ის თანახმად

$$V(S_1,F_1;S_2,F_2) = a(S_1 - P_1) - (S_1 - P_1)^2 - V_1 + a(S_2 - P_2) - (S_2 - P_2)^2 - V_2 \tag{2.8}$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$V(S_1,F_1;S_2,F_2) = a(S - P) - (S - P)^2 + 2(S_1 - P_1)(S_2 - P_2) - V \tag{2.9}$$

სადაც P და V არის $F(x)$-ის საშუალო და დისპერსია. ზარალების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარე $P = P_1 + P_2$ და $V = V_1 + V_2$. (2.9) გამოსახულება მაქსიმალურია S_1 და S_2-ის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

$$S_1 = \frac{S + P_1 - P_2}{2} = \frac{S + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{S + P_2 - P_1}{2} = \frac{S + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{2}$$

სადაზღვევო ფონდის ასეთი გადანაწილება უზრუნველყოფს როგორც მთლიანი, ასევე ცალკეული ქვეპორტფელების ოპტიმალურობას.

2) ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მოდელი საშუალებას გვაძლევს შევარჩიოთ ოპტიმალური პორტფელი არა მარტო ფონდების გადანაწილებით, არამედ სადაზღვევო პროდუქტის დიზაინის ცვლილებით. განვიხილოთ წინა მაგალითის მსგავსი სიტუაცია, სადაც კომპანიის წინაშე დგას ოპტიმალური ფრანშიზების (λ_1,λ_2) დაწესების ამოცანა (ფრანშიზა წარმოადგენს ზარალის იმ სიდიდეს რომელსაც თავისთავზე იღებს დაზღვეული). დავუშვათ, რომ

$$S = P(1+\theta) \tag{2.10}$$

სადაც θ არის ე.წ დატვირთვა, რომელიც ჩვენ შემთხვევაში მოცემული სიდიდეა.

ფრანშიზის შემოღება ზარალის განაწილების ფუნქციებს შემდეგნაირად შეცვლის:

$$F_1(y) = 1 - e^{-\alpha(y+\lambda_1)}, \quad F_2(z) = 1 - e^{-\beta(z+\lambda_2)}$$

შესაბამისად, საშუალოები და დისპერსიები იქნება:

$$P_1 = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\lambda_1} \approx \frac{1}{\alpha} - \lambda_1, V_1 = \frac{e^{-\alpha\lambda_1}}{\alpha^2}\left(2 - e^{-\alpha\lambda_1}\right) \approx \frac{1}{\alpha^2}; \quad P_2 = \frac{1}{\beta}e^{-\beta\lambda_2} \approx \frac{1}{\beta} - \lambda_2, V_2 = \frac{e^{-\beta\lambda_2}}{\beta^2}\left(2 - e^{-\beta\lambda_2}\right) \approx \frac{1}{\beta^2}.$$

ამ მიახლოების საშუალებას გვაძლევს ტეილორის მწკრივად გაშლა(α, β-ს სიმცირის პირობებში).

რადგან $P = P_1 + P_2 = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} - \lambda_1 - \lambda_2$, $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$

ამიტომ (1.2)-ის და (2.10)-ის თანახმად გვექნება:

$$U(S,F) = a\theta\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - (\lambda_1 + \lambda_2)\right) - \theta^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - (\lambda_1 + \lambda_2)\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}.$$

ეს გამოსახულება აღწევს მაქსიმუმს, როცა

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{a}{2\theta} \equiv \lambda^*.$$

ამრიგად მთლიანი პორტფელის ოპტიმალურობა მიიღწევა ასეთი λ^*-ის დროს. (2.3)-ის თანახმად;

$$V(S_1, F_1; S_2, F_2) = a\theta\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda_1\right) + a\theta\left(\frac{1}{\beta} - \lambda_2\right) - \theta^2\left(\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda_1\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta} - \lambda_2\right)^2\right) - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}.$$

ეს გამოსახულება მაქსიმალურია λ_1-ის და λ_2-ის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{a}{4\theta}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\beta} - \frac{a}{4\theta}.$$

ამრიგად, ასეთი λ_1 და λ_2 უზრუნველყოფს სადაზღვევო პროდუქტის ოპტიმალურ დიზაინს.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. მ.მანია, ნ.ლაზრიევა, გ.მირზაშვილი, თ.ტორონჯაძე, ო.ღლონტი, ლ.ჯამბურია „ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები", თბილისი, 1999.
2. K.Borch "Utility Concept Applied to the Theory of Insuranse" , Brusseles, 1960.
3. Neumann J. von and O.Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior", Prinston, 1944.