რისკის თეორიის მეთოდების გამოყენება სიცოცხლის დაზღვევაში

ი. დოლაკიძე,   გ. მირზაშვილი

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

სიცოცხლის დაზღვევის ერთერთ ძირითად ფორმას წარმოადგენს საპენსიო დაზღვევა, რომელიც გარკვეული სქემების მიხედვით ხორციელდება.

სადაზღვევო პრაქტიკაში ძირითადად გამოიყენება ორი სქემა. პირველი – ე.წ. სადაზღვევო შენატანებით განსაზღვრული სქემა გულისხმობს, რომ პიროვნება გარკვეულ ასაკში ერთვება სქემაში და საპენსიო ასაკის მიღწევამდე პერიოდულად, (როგორც წესი ყოველთვიურად) იხდის სადაზღვევო შესატანს (პრემიას), რომელიც მისი ფინანსური შესაძლებლობებით განისაზღვრება (ხშირად პრემია ხელფასის ფიქსირებულ პროცენტს შეადგენს). გასაგებია რომ სადაზღვევო შესატანები შეიძლება განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან, მითუმეტეს, რომ პიროვნებას თავის სურვილის მიხედვით შეუძლია გაზარდოს ეს შესატანები. იგულისხმება, რომ სადაზღვევო პრემიებით შექმნილი ფონდი (რეზერვი) ინვესტირდება და ყოველწლიურად მას გარკვეული მოგება ერიცხება ფიქსირებული წლიური საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისად. ამ გზით პიროვნების ანგარიშზე საპენსიო ასაკის მიღწევის მომენტში გარკვეული თანხა დაგროვდება, რომელიც შემდგომში დაზღვეულთან (ამ შემთხვევაში პენსიის მიმღებთან) შეთანხმებული წესის მიხედვით (მაგ. ყოველთვიურად, სიცოცხლის ბოლომდე) ამ უკანასკნელს პენსიის სახით დაუბრუნდება. გასაგებია, რომ პენსიის გაცემის წესის არჩევის შემდეგ პენსიის ოდენობა დაგროვებული თანხის მიხედვით განისაზღვრება.

ზემოთ აღწერილი სქემისაგან განსხვავებით მეორე – ე.წ. პენსიის ოდენობით განსაზღვრული სქემა გულისხმობს, რომ მომავალი პენსიის ოდენობა და გაცემის წესი პიროვნების სქემაში ჩართვის მომენტში ფიქსირდება. მაგ. სადაზღვევო ხელშეკრულებაში შეიძლება დაფიქსირდეს, რომ საპენსიო ასაკის მიღწევის მომენტიდან დაწყებული,

პიროვნებას სურს ყოველთვიურად სიცოცხლის ბოლომდე (ან მაგ. 15 წლის განმავლობაში) პენსიის სახით მიიღოს 100 ლარი. ასეთ შემთხვევაში უპირველეს ამოცანას წარმოადგენს ისეთი საპენსიო შესატანის განსაზღვრა, რომელიც დაზღვეულის ასაკის, ქვეყანაში არსებული მოკვდაობისა და საინვესტიციო გარემოს გათვალისწინებით მომავალში უზრუნველყოფს პენსიის სრულად გაცემას. ეს ამოცანა აქტუარული მეცნიერების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს და სწორედ მის გადაჭრას ეძღვნება წინამდებარე ნაშრომი.

§ 1 ამოცანის დასმა

განვიხილოთ პენსიის ოდენობით განსაზღვრული საპენსიო სქემა, რომელიც გულისხმობს, რომ დაზღვეულმა, დაწყებული მის მიერ საპენსიო ასაკის მიღწევის მომენტიდან, სიცოცხლის ბოლომდე, პენსიის სახით ყოველწლიურად უნდა მიიღოს გარკვეული S თანხა. ჩვენს მოდელში ინფლაცია არ არის უშუალოდ გათვალისწინებული და ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ S თანხა შერჩეულია დღევანდელი პირობებისა და ინფლაციის გათვალისწინებით.

ვიგულისხმოთ, რომ სქემაში ჩართვის მომენტში პიროვნების ასაკი x სრულ წელიწადს შეადგენს (ე. ი. მას უკვე შეუსრულდა x წელი, მაგრამ ჯერ არ შეუსრულდა $(x+1)$ წელი), ხოლო საპენსიო ასაკი $(x+n)$-ს უდრის. ეს იმას ნიშნავს, რომ n სადაზღვევო წლის განმავლობაში მოხდება პიროვნების სადაზღვევო რეზერვის დაგროვება და შემდგომ დაიწყება ყოველწლიური S პენსიის გაცემა, რაც დაზღვეულის სიცოცხლის ბოლომდე გაგრძელდება. უფრო დაწვრილებით მთელი პროცესი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ.

პენსიის გაცემა იწყება $(n+1)$- ე სადაზღვევო წლის დასაწყისში. ამ მომენტში დაზღვეული $(x+n)$ სრული წლისაა. შემდეგი პენსია გაიცემა $(n+2)$-ე სადაზღვევო წლის დასაწყისში და ა.შ. , ყოველი შემდგომი სადაზღვევო წლის დასაწყისში დაზღვეული მიიღებს შემდეგ წლიურ პენსიას, თუ იგი ამ მომენტში ცოცხალია. ასევე ვიგულისხმოთ, რომ სადაზღვევო შესატანებს (პრემიებს) დაზღვეული ასევე წლის დასაწყისში იხდის: პირველს – პირველი სადაზღვევო წლის დასაწყისში, მეორეს – მეორე სადაზღვევო წლის დასაწყისში და ა.შ. ბოლოს – მე- n-ე სადაზღვევო წლის დასაწყისში. თუ დაზღვეული გარდაიცვლება პირველი n სადაზღვევო წლის განმავლობაში, გარდაცვალების მომენტისათვის მის სახელზე დაგროვებული

სადაზღვევო რეზერვი თანაბრად გადანაწილდება სქემის დანარჩენ მონაწილეებზე.

ამგვარად, სადაზღვევო პერიოდი ორ განსხვავებულ ნაწილად იყოფა. პირველი ნაწილი, რომელსაც ჩვენ დაგროვების პერიოდს ვუწოდებთ, პირველ n სადაზღვევო წელს შეადგენს, ხოლო მეორე – ხარჯვის პერიოდი $(n+1)$-ე სადაზღვევო წლით იწყება და დაზღვეულის გარდაცვალებით სრულდება. ქვემოთ ჩვენ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ მთელი სადაზღვევო პერიოდის განმავლობაში მოქმედებს i წლიური საპროცენტო განაკვეთი და ყოველი ინვესტირებული თანხა m წლის შემდეგ $A(1+i)^m$ თანხად გადაიქცევა. i წლიური საპროცენტო განაკვეთის შესაბამის დისკონტირების კოეფიციენტს, v- თი აღვნიშნავთ:

$$v=\frac{1}{1+i}$$

m წლის შემდეგ საჭირო თანხის დღევანდელი ღირებულება v^m-ის ტოლი იქნება.

ამოცანა მდგომარეობს ისეთი ყოველწლიური C პრემიის განსაზღვრაში, რომელიც უზრუნველყოფს საპენსიო სქემით გათვალისწინებული ვალდებულებების შესრულებას.

როგორც დაზღვევის ყოველი სხვა სახეობა, საპენსიო დაზღვევაც დაკავშირებულია რისკთან (მომავალში პენსიის სახით გასაცემი თანხებისა და პრემიებით შექმნილი სადაზღვევო რეზერვის მოცულობის განუსაზღვრელობასთან). ცხადია, რომ რისკის წარმოქმნის წყაროს წარმოადგენს ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობის განუსაზღვრელობა. თუ მაგ. საპენსიო სქემის მონაწილეთა მნიშვნელოვანი ნაწილი დიდხანს (ქვეყანაში არსებული საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე გაცილებით მეტხანს) იცოცხლებს, მაშინ პენსიის სახით შედარებით უფრო დიდი თანხა იქნება გასაცემი. პირიქით, თუ სქემის მონაწილეთა მნიშვნელოვანი ნაწილი საშუალო ასაკის მიღწევამდე გარდაიცვლება, სადაზღვევო კომპანიას (ან საპენსიო ფონდს) ნაკლები თანხა ექნება გასაცემი. ცხადია, რომ ასეთ

პირობებში ყოველწლიური C პრემიის განსაზღვრისათვის საჭიროა ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენება.

საზოგადოდ, სადაზღვევო პრემიას აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

$$\Pi = N + L + A \qquad (1)$$

(1)-ში Π – მთლიანი პრემიაა, N არის ე.წ. ნეტო–პრემია, L – სადაზღვევო დატვირთვა, ხოლო A წარმოადგენს ადმინისტრაციულ და აკვიზიციურ ხარჯებს. ეს ბოლო შესაკრები, როგორც წესი, წინასწარ განსაზღვრული და შედარებით მყარი სიდიდეა, მისი გამოთვლა მათემატიკის თვალსაზრისით საინტერესო არ არის და მომავალში ჩვენ მას არსად აღარ გავითვალისწინებთ. ამგვარად, ჩვენთვის პრემია ნეტო–პრემიისა და სადაზღვევო დატვირთვის ჯამს წარმოადგენს:

$$\Pi = N + L \qquad (2)$$

ნეტო–პრემიის შინაარსი იმაში მდგომარეობს (ზუსტი განმარტება იხილეთ ქვემოთ), რომ იგი უზრუნველყოფს დაგროვებული რეზერვისა და პენსიის სახით გაცემული თანხის საშუალო მნიშვნელობების ტოლობას, ანუ საშუალოდ უზრუნველყოფს საპენსიო ვალდებულებების შესრულებას.

სამწუხაროდ, ნეტო–პრემია არ არის საკმარისი საპენსიო სქემის განხორციელებისათვის ვინაიდან, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, სქემის მონაწილეთა სიცოცხლის ხანგრძლივობამ სავსებით შეიძლება გადააჭარბოს საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობას და ასეთ შემთხვევაში სადაზღვევო რეზერვი არასაკმარისი აღმოჩნდება. რასაკვირველია შეიძლება ისიც მოხდეს, რომ ნეტო–პრემიებით შექმნილი სადაზღვევო რეზერვი ჭარბი აღმოჩნდეს, მაგრამ სადაზღვევო კომპანია (ან საპენსიო ფონდი) ყოველთვის ცდილობს, რომ მზად იყოს მოვლენათა არახელსაყრელი განვითარებისათვის. სწორედ ამ მიზნით ყოველწლიურ სადაზღვევო პრემიაში N ნეტო–პრემიის გარდა

ითვალისწინებენ L სადაზღვევო დატვირთვას, რომლის როლი სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ დაიცვას სადაზღვევო რეზერვი იმ შემთხვევაში, როდესაც სქემის მონაწილეთა სიცოცხლის ხანგრძლივობა საშუალოზე მეტი აღმოჩნდება. უნდა აღინიშნოს, რომ L -ის გაუმართლებლად დაბალმა მნიშვნელობამ შეიძლება სადაზღვევო სქემის გაკოტრება გამოიწვიოს, ხოლო გაუმართლებლად მაღალმა მნიშვნელობამ – საპენიო სქემის გაძვირება და სადაზღვევო კომპანიის (ან საპენიო ფონდის) საკონკურენტო ბრძოლაში დამარცხება. ამგვარად, L დატვირთვის ოპტიმალური სიდიდის განსაზღვრა უაღრესად საინტერესო და აქტუალურ ამოცანას წარმოადგენს.

§ 2 მოკვდაობა. მოკვდაობის ცხრილი

ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობა T შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ჩვენს მიერ განხილულ სქემაში ასაკი დისკრეტულ მნიშვნელობებს ღებულობს, ვინაიდან ჩვენ ვინტერესდებით იმ სრული წლების რაოდენობით, რომელიც პიროვნებას შეურსულდა კალენდარული დროის გარკვეული მომენტისათვის. აქედან გამომდინარე სიცოცხლის ხანგრძლივობაც ჩვენს შემთხვევაში დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე იქნება, რომელიც ღებულობს არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს 0-დან პირობითად 100-ის ჩათვლით.

ცნობილია, რომ საზოგადოების სხვადასხვა ფენებს სხვადასხვა სიცოცხლის ხანგრძლივობა ახასიათებს, მაგ. ქალები უფრო დიდხანს ცოცხლობენ, ვიდრე მამაკაცები, დირიჟორები უფრო დიდხანს ცოცხლობენ, ვიდრე სხვა პროფესიის წარმომადგენლები და სხვა. ამ ნაშრომში, სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ ერთიან, მთელი საზოგადოებისათვის დამახასიათებელ სიცოცხლის ხანგრძლივობას (შესაბამისად მოკვდაობას) და არ შევეხებით საზოგადოების სხვადასხვა ფენებს შორის ამ თვალსაზრისით არსებულ განსხვავებას. შემოვიღოთ ტრადიციული აღნიშვნა:

$${}_k p_x = P(T \geq x + k / T \geq x) \qquad (3)$$

${}_k p_x$- არის ალბათობა იმისა, რომ x ასაკს მიღწეული პიროვნება ასევე მიაღწევს $(x+k)$ ასაკსაც, კერძოდ

$$p_x \equiv {}_1 p_x$$

– არის ალბათობა იმისა, რომ x ასაკში მყოფი პიროვნება არ გარდაიცვლება უახლოესი ერთი წლის განმავლობაში.

$${}_k q_x = 1 - {}_k p_x$$

$$q_x = 1 - p_x$$

წარმოადგენს x ასაკს მიღწეული პიროვნების გარდაცვალების ალბათობას, შესაბამისად უახლოესი k და ერთი წლის განმავლობაში. შემოღებული ალბათობები ცალსახად განსაზღვრავს T სიცოცხლის ხანგრძლივობის ალბათურ განაწილებას. მართლაც,

$$P(T = n) = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot q_n \qquad (4)$$

სხვა სიტყვებით ყველა x - სათვის p_x (ან q_x) ალბათობის ცოდნა ტოლფასია სიცოცხლის ხანგრძლივობის ალბათური განაწილების ცოდნისა. (4) ფორმულის მნიშვნელობა იმაშიც მდგომარეობს, რომ პრაქტიკაში p_x და q_x ალბათობები შედარებით ადვილი შესაფასებელია, ამისათვის გამოიყენება მოსახლეობის აღწერისა და წლიური მოკვდაობის სტატისტიკური მონაცემები.

დემოგრაფიაში და სადაზღვევო საქმეში მიღებულია ამ შეფასების მოკდვაობის ცხრილის სახით წარმოდგენა.

მოკვდაობის ცხრილი რამდენიმე სვეტისაგან შედგება, პირველ სვეტში ჩამოთვლილია მთელი ასაკები 0-დან 100-ის ჩათვლით, მეორე სვეტში ჩამოთვლილია ასაკების შესაბამისი q_x ალბათობები, მესამე სვეტის პირველი სტრიქონი წარმოადგენს ცოცხლად შობილი ბავშვების პირობით რაოდენობას. მას ცხრილის ფუძეს უწოდებენ და

l_0-ით აღნიშნავენ ხშირად l_0=100000. მესამე სვეტის მეორე სტრიქონში წერია

$$l_1 = l_0(1-q_0)$$

რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს ერთი წლის ასაკს მიღწეულ ბავშვთა საშუალო რაოდენობას. ანალოგიურად ყოველი x-სათვის

$$l_x = l_{x-1}(1-q_{x-1}) \qquad (5)$$

გასაგებია, რომ l_x მიმდევრობა კლებადია, იგი აღწერს თაობის თანდათანობით გაქრობის პროცესს.

შემდეგ სვეტში მონაწილე სიდიდეები ტრადიციულად d_x-ით აღინიშნება. გვაქვს

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

d_x გვიჩვენებს თუ საშუალოდ x ასაკში რამდენი პიროვნება გარდაიცვლება. სრულ მოკვდაობის ცხრილში კიდევ მრავალი სვეტია მათ სხვადასხვა დემოგრაფიული შინაარსი აქვს, მაგრამ ჩვენ მხოლოდ ზემოთ აღწერილი სვეტები დაგვჭირდება. ქვემოთ მოყვანილ გამოთვლებში ჩვენ ვიყენებთ საქართველოს მოსახლეობის 1999 წლის ორივე სქესისათვის გათვლილ მოკვდაობის ცხრილს.

§3 დაგროვების და ხარჯვის პროცესები

როგორც §1-ში იყო აღნიშნული სქემის მოქმედების მთელი პერიოდი ორი ნაწილისაგან – დაგროვებისა და ხარჯვის პერიოდებისაგან შედგება. დაგროვების პერიოდი n სადაზღვევო წელს გრძელდება და ყოველი წლის დასაწყისში ყოველ დაზღვეულს ფონდში ჯერჯერობით უცნობი C წლიური პრემია შეაქვს.

ვთქვათ, სქემაში ერთდროულად ჩაერთო x ასაკში მყოფი N_x პიროვნება. გასაგებია, რომ პირველი სადაზღვევო წლის დასაწყისში ფონდში შევა (CN_x) თანხა. N_x – ფიქსირებული (არა შემთხვევითი) რიცხვია, მაგრამ სქემის მონაწილეთა შორის $(x+1)$

ასაკს მიღწეულთა N_{x+1} რაოდენობა უკვე შემთხვევითია, რასაკვირველია ასევე შემთხვევითი იქნება $(x+k)$, $k=2,...,100-x$ ასაკამდე მიღწეულთა N_{x+k} რაოდენობები.

დაგროვების პერიოდის k-ური წლის დასაწყისში სადაზღვევო ფონდს შეემატება (CN_{x+k}) თანხა, რომელიც ინვესტირებული იქნება და დაგროვების პერიოდის ბოლოსათვის გადაიქცევა

$$CN_{x+k}(1+i)^{n-k}, \qquad k=0,1,2...,n-1$$

თანხად. ამგვარად, დაგროვების პერიოდის ბოლოსთვის (პირველი პენსიის გაცემის მომენტისთვის) სადაზღვევო რეზერვში

$$CY_1 = C\sum_{k=0}^{n-1} N_{x+k}(1+i)^{n-k} \tag{7}$$

შემთხვევითი თანხა დაგროვდება.

პირველ პენსიას პენსიონერთა N_{x+n} შემთხვევითი რაოდენობა მიიღებს, რაზეც (SN_{x+n}) თანხა დაიხარჯება. შემდგომ პენსიას N_{x+n+1} პიროვნება მიიღებს, რასაც (SN_{x+n+1}) თანხა დასჭირდება. ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, რომ პირველი პენსიის გაცემის შემდეგ გაგრძელდება სადაზღვევო რეზერვში დარჩენილი თანხის ინვესტირება (მაგ. დარჩენილი თანხა შეინახება საბანკო ანგარიშზე) რაც იმას ნიშნავს, რომ (SN_{x+n+1}) თანხის გასაცემად საკმარისია ხარჯვის პერიოდის დასაწყისისათვის გვქონდეს (νSN_{x+n+1}) თანხა. ანალოგიურად ყოველი m-ური პენსიის გასაცემად საკმარისია, რომ ხარჯვის პერიოდის დასაწყისში ვიქონიოთ $\left(\nu^{m-1}SN_{x+n+m-1}\right)$თანხა.

ამგვარად, საპენიოს ვალდებულებების მთლიანად შესრულებისათვის საჭიროა, რომ ხარჯვის პერიოდის დასაწყისში გვქონდეს

$$SY_2 = S\sum_{k=0}^{100-x-n} N_{x+n+k}\nu^k \tag{8}$$

თანხა.
საბოლოოდ დაგროვების პერიოდის ბოლოსთვის (ხარჯვის პერიოდის დასაწყისისთვის) ვაგროვებთ Y_1 შემთხვევით თანხას და გვჭირდება Y_2 შემთხვევითი თანხა.

§4 ნეტო–პრემიის განსაზღვრა. ექვივალენტობის პრინციპი

განმარტების თანახმად, C საპრემიო შესატანი იქნება ნეტო-პრემია თუ იგი დააკმაყოფილებს შემდეგ ექვივალენტობის პრინციპს

$$C\mathrm{E}(Y_1 / N_x) = S\mathrm{E}(Y_2 / N_x) \tag{9}$$

სხვა სიტყვებით C არის ნეტო-პრემია, თუ

$$C = S\frac{\mathrm{E}(Y_2 / N_x)}{\mathrm{E}(Y_1 / N_x)} \tag{10}$$

გამოვსახოთ ნეტო-პრემია მოკვდაობის ცხრილში მოცემული სიდიდეების მეშვეობით, რათა გავაადვილოთ შემდგომში მისი გამოთვლა. გვაქვს

$$\mathrm{E}(Y_1 / N_x) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} N_{x+k}(1+i)^{n-k} / N_x\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{n-k}\,\mathrm{E}(N_{x+k} / N_x) \tag{11}$$

$\mathrm{E}(N_{x+k} / N_x)$-ის გამოსათვლელად შევნიშნოთ, ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიმყოფებით ბერნულის სქემის პირობებში. მართლაც, თუ ჩავთვლით, რომ სქემაში თავდაპირველად ჩართული N_x პიროვნების გარდაცვალება არ არის ერთმანეთზე დამოკიდებული და ყველა ამ პიროვნებას ალბათური თვალსაზრისით ერთი და იგივე სიცოცხლის ხანგრძლიობა აქვს, მაშინ გვაქვს N_x დამოუკიდებელი ექსპერიმენტი და ყოველ ექსპერიმენტში წარმატების ($(x+k)$ ასაკამდე მიღწევის)

ალბათობა არის ${}_k p_x$. როგორც ცნობილია ასეთ შემთხვევაში N_{x+k} იქნება ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე და

$$\mathrm{E}\left(N_{x+k} / N_x\right) = N_x \, {}_k p_x$$

§2−ში იყო აღნიშნული რომ ${}_k p_x = \dfrac{l_{x+k}}{l_x}$ და საბოლოოდ

$$\mathrm{E}\left(N_{x+k} / N_x\right) = N_x \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{12}$$

შევიტანოთ (12) (11)-ში, მივიღებთ

$$\mathrm{E}\left(Y_1 / N_x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k} N_x \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{13}$$

ანალოგიურად გამოითვლება $\mathrm{E}\left(Y_2 / N_x\right)$. გვაქვს

$$\mathrm{E}\left(Y_2 / N_x\right) = \sum_{k=0}^{100-x-n} \frac{N_x}{l_x} l_{x+n+k} \nu^k \tag{14}$$

(10), (13) და (14) ფორმულების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$C = S \frac{\sum_{k=0}^{100-x-n} l_{x+n+k} \nu^k}{\sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k} l_{x+k}} = S \frac{\sum_{k=0}^{100-x-n} l_{x+n+k} \nu^{n+k}}{\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} \nu^k} \tag{15}$$

არ არის რთული (15) ფორმულის შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამის შედგენა და მოცემული საპროცენტო განაკვეთისა და მოკვდაობის ცხრილისთვის ნეტო-პრემიის გამოთვლა.

§5 მოკვდაობის ცხრილის გარდაქმნის მეთოდი

როგორც ეს §1-ში იყო აღნიშნული ნეტო-პრემია არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ მაღალი გარანტიით უზრუნველყოთ საპენსიო ვალდებულებების შესრულება. უნდა აღინიშნოს, რომ ამგვარი პრობლემა არა სიცოცხლის დაზღვევაშიც გვხვდება, მაგრამ პრაქტიკაში პრობლემის გადაჭრა სიცოცხლისა და არა სიცოცხლის დაზღვევაში სხვადასხვანაირად ხდება.

სიცოცხლის დაზღვევაში ე.წ. მოკვდაობის ცხრილის გარდაქმნის მეთოდს იყენებენ. მისი არსი შემდგომში მდგომარეობს. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული მოკვდაობის ცხრილში მასში მოყვანილი q_x ალბათობების მეშვეობით ფაქტიურად წარმოდგენილია სიცოცხლის ხანგრძლივობის ალბათური განაწილება (იხ. (4) ფორმულა). გასაგებია, რომ თუ ერთი ცხრილის q_x-ები აღემატება მეორე ცხრილის q_x -ებს, მაშინ პირველ ცხრილში l_x მიმდევრობა უფრო სწრაფად კლებადია, ვიდრე მეორეში და შესაბამისად საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობა პირველი ცხრილის მიხედვით უფრო ნაკლებია, ვიდრე მეორე ცხრილის მიხედვით. ასევე ამბობენ, რომ პირველ ცხრილს უფრო მაღალი მოკვდაობის ინტენსიობა (მოკვდაობის ძალა) ახასიათებს, ვიდრე მეორეს. მოკვდაობის ცხრილის გარდაქმნის მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს. მოცემული ცხრილის მაგივრად განიხილავენ ისეთ ცხრილს, რომელშიც x ასაკში გარდაცვალების q_x^{α} ალბათობები შემდეგი წესით გამოითვლება.

$$q_x^{\alpha} = 1 - \left(1 - q_x\right)^{\alpha} \qquad (16)$$

თუ $\alpha > 1$ მაშინ q_x^{α} > q_x , ანუ ახალი ტაბულის მიხედვით სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა უფრო ნაკლები იქნება. შესაბამისად თუ $\alpha < 1$ მაშინ q_x^{α} < q_x , და ახალი ცხრილით სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა უფრო მეტია.

საპენსიო დაზღვევის დროს რეალური ცხრილის მაგივრად იყენებენ ცხრილს, რომელშიც მაშინ q_x^{α} ალბათობები შეესაბამება α=0.8, ან α=0.9. ცხადია, რომ ამის შედეგად (15) ფორმულა ნეტო-პრემიის

გაზრდილ მნიშვნელობას მოგვცემს, რაც გარკვეულ წილად რეალურ ნეტო-პრემიასთან შედარებით ზრდის იმის გარანტიას, რომ საპენსიო ვალდებულებები გასტუმრებული იქნება.

ჩვენის აზრით ამ მეთოდის ნაკლოვანება იმაში მდგომარეობს, რომ გაუგებარია რამდენით იზრდება α-ს შემცირებით პენსიების სრულად გაცემის გარანტია და საერთოდ რა მოსაზრებიდან გამომდინარე უნდა ავირჩიოთ α-ს ესა თუ ის მნიშვნელობა. ჩვენის აზრით დასმულ კითხვებზე პასუხის გაცემა შესაძლებელია თუ გამოვიყენებთ რისკის თეორიის მიდგომას.

§6 რისკის თეორიის მიდგომა

რისკის თეორია აქტუარული მეცნიერების ერთ-ერთ ძირითად ნაწილს წარმოადგენს. იგი მოიცავს ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკისა და შემთხვევითი პროცესების თეორიის გარკვეულ ნაწილებს. ტერმინი „რისკი“ რისკის თეორიაში აღნიშნავს შემთხვევით ზარალს.

ამ თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი დანიშნულება მოცემული სადაზღვევო პორტფელის პირობებში „სწორი“ პრემიის დადგენაში მდგომარეობს. თანახმად რისკის თეორიის მიდგომისა ძირითად ერთეულს წარმოადგენს არა ცალკეული (ინდივიდუალური) რისკი, არამედ რისკების ერთობლიობა – სადაზღვევო პორტფელი. პორტფელის ერთიანი რისკი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობები მთლიანი ასანაზღაურებელი თანხის შესაძლო მნიშვნელობებს ემთხვევა. საკვანძო მომენტს პორტფელის ერთიანი რისკის ალბათური განაწილების განსაზღვრა წარმოადგენს. სწორედ ამ განაწილების საფუძველზე ხერხდება მოცემული სადაზღვევო პორტფელის შესაბამისი მინიმალური აუცილებელი სადაზღვევო რეზერვის მოცულობის განსაზღვრა.

ვთქვათ Y პორტფელის ერთიანი რისკია, ხოლო

$$F(y) = P(Y \le y)$$

მისი განაწილების ფუნქციაა. საკმაოდ ადვილია ($F(y)$-ის ცოდნის პირობებში) ნეტო-რეზერვის $N(Y)$ მოცულობის განსაზღვრა. სახელდობრ

$$N(Y) = \mathrm{E}(Y)$$

სადაც $\mathrm{E}(Y)$ Y ერთიანი რისკის მათემატიკური ლოდინია. $N(Y)$ რეზერვი უზრუნველყოფს Y რისკის საშუალოდ განეიტრალებას ანუ ე.წ. – კომპენსირებული რისკი

$$Y - N(Y)$$

საშუალოდ 0-ოვანი იქნება. უხეშად რომ ვთქვათ ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ სადაზღვევო კომპანია მრავალი წლის განმავლობაში დაკმაყოფილდება ნეტო-რეზერვების შექმნით, მაშინ ზოგი პორტფელი მისთვის წამგებიანი აღმოჩნდება, ზოგი – მომგებიანი და ჯამში მრავალი წლის მოღვაწეობის შედეგად მისი მოგება-წაგება დაახლოებით 0-ვანი იქნება. სამწუხაროდ სადაზღვევო კომპანიას არ შეუძლია ამგვარი სტრატეგიის განხორციელება, ვინაიდან მაგ. პირველივე წელს ზარალმა შეიძლება მნიშვნელოვნად გადააჭარბოს თავის საშუალო მოსალოდნელ მნიშვნელობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნეტო-რეზერვი არ ეყოფა ზარალების ანაზღაურებას და მოხდება გაკოტრება. სწორედ გაკოტრების თავიდან ასაცილებლად მოცემული პორტფელისათვის იქმნება უფრო დიდი მოცულობის მქონე ე. წ. ბრუტო რეზერვი, რომლის $\mathrm{B}(Y)$ მოცულობა განისაზღვრება იქედან გამომდინარე, რომ

$$P(Y > \mathrm{B}(Y))$$

ე. წ. გაკოტრების ალბათობა საკმაოდ მცირე იყოს. სხვათაშორის უნდა აღინიშნოს, რომ ნეტო-რეზერვიც უზრუნველყოფს არ გაკოტრების გარკვეულ ალბათობას, მაგრამ როგორც წესი ეს ალბათობა კომპანიისათვის მიუღებლად დაბალია.

ვთქვათ, α არის კომპანიისათვის მისაღები არ გაკოტრების ალბათობა. α შეიძლება უდრიდეს 0.9, 0.95, ან 0.99-საც კი. თუ ცნობილია $F(y)$ განაწილების ფუნქცია არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს მისი ე. წ. α კვანტილის დადგენა შემდეგი განტოლებიდან

$$F(y_\alpha) = \alpha$$

მაგ. თუ $F(y)$ მონოტონურად ზრდადია, მაშინ მას გააჩნია შებრუნებული ფუნქცია

$$y_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

ამგვარად, $\mathrm{B}(Y)$ ბრუტო-რეზერვი, რომელიც უზრუნველყოფს არ გაკოტრების ალბათობას მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$\mathrm{B}(Y) = y_\alpha \tag{17}$$

§7 რისკის თეორიის გამოყენება საპენსიო სქემის გათვლის ამოცანაში

გამოვიყენოთ რისკის თეორიის მიდგომა ჩვენი საპენსიო სქემის გათვლისათვის. დროებით წარმოვიდგინოთ, რომ სქემაში ჩართული x ასაკში მყოფი N_x პიროვნება სადაზღვევო პრემიას იხდის ერთჯერადად – სქემაში ჩართვის თანავე. ეს ერთჯერადი პრემია აღვნიშნოთ C_1 -ით. გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში პორტფელის ერთიანი რისკი Y ემთხვევა ზემოთ შემოღებულ (SY_2)-ს, ხოლო ერთჯერადი C_1 პრემიებით შედგენილი სადაზღვევო რეზერვი პენსიების გაცემის მომენტისათვის შეადგენს

$$C_1 N_x (1+i)^n \qquad (18)$$

თანხას. ერთჯერადი პრემიის შემთხვევა შედარებით მარტივია იმიტომ, რომ (18)-ით მოცემული სადაზღვევო რეზერვი არ არის შემთხვევითი, რის გამოც შეიძლება უშუალოდ წინა პარაგრაფის მსჯელობის გამოყენება. კერძოდ, ერთჯერადი C_1 პრემია, რომელიც უზრუნველყოფს პორტფელის α ალბათობით არ გაკოტრებას, გამოითვლებოდა შემდეგი განტოლებიდან

$$P\left(SY_2 \le C_1 N_x (1+i)^n\right) = \alpha \qquad (19)$$

სხვა სიტყვებით თუ r_α წარმოადგენს Y_2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის α კვანტილს

$$P(Y_2 \le r_\alpha) = \alpha$$

მაშინ

$$\frac{C_1}{S} N_x (1+i)^n = r_\alpha$$

და

$$C_1 = S \frac{r_\alpha v^n}{N_x} \qquad (20)$$

როგორც ვხედავთ (20) ფორმულის პრაქტიკაში გამოსაყენებლად გვჭირდება მხოლოდ Y_2 -ის განაწილების ფუნქციის – უფრო ზუსტად კი ამ განაწილების r_α კვანტილის ცოდნა.

დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას, ანუ იმ შემთხვევას, როცა პრემიების გადახდა ხდება ყოველწლიურად. პორტფელის ერთიანი რისკი კვლავ (SY_2) სიდიდე იქნება, პენსიების გაცემის მომენტისათვის

დაგროვებული რეზერვი კი $-(CY_1)$. ერთჯერადი პრემიის შემთხვევასთან შედარებით განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ (CY_1) რეზერვი შემთხვევითია იმ დროს, როდესაც (18)-ით მოცემული რეზერვი არ იყო შემთხვევითი. რისკის თეორიის მიდგომის თანახმად ყოველწლიური C პრემია, რომელიც უზრუნველყოფს პორტფელის α ალბათობით არ გაკოტრებას გამოითვლება შემდეგი განტოლებიდან

$$P(SY \le CY_1) = \alpha \qquad (21)$$

(21) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$P\left(\frac{Y_2}{Y_1} \le \frac{C}{S}\right) = \alpha \qquad (22)$$

ისევე როგორც ზემოთ თუ R_α წარმოადგენს $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ შემთხვევითი სიდიდის α კვანტილს

$$P\left(\frac{Y_2}{Y_1} \le R_\alpha\right) = \alpha$$

მაშინ

$$\frac{C}{S} = R_\alpha \qquad (23)$$

უკანასკნელი ფორმულის პრაქტიკაში გამოსაყენებლად გვჭირდება $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის R_α კვანტილის ცოდნა.

§8 კომპიუტერული მოდელირების მეთოდი

Y_1, Y_2 და მითუმეტეს $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ შემთხვევით სიდიდეებს საკმაოდ რთული მათემატიკური კონსტრუქცია აქვთ. ამ სიდიდეების შემთხვევით მექანიზმს განსაზღვრავს მიმდევრობა

$$N_x, N_{x+1}, ..., N_\omega$$

ამ მიმდევრობის პირველი წევრი ფიქსირებულია, ხოლო დანარჩენი წევრები შემხვევითი სიდიდეებია. ეს შემთხვევითი სიდიდეები არ არის დამოუკიდებელი – ყოველი შემთხვევითი სიდიდე დაწყებული მეორედან დამოკიდებულია წინა შემთხვევით სიდიდეზე. უფრო ზუსტად ეს მიმდევრობა წარმოადგენს არაერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს, რომლის გადასვლის ალბათობები შემდეგი წესით განისაზღვრება.

დავიწყოთ (N_{x+1})-ის განაწილებით. შემოვიღოთ, $\xi_i(x)$, $i = 1,2,..., N_x$ შემთხვევითი სიდიდეები.

1, თუ სქემაში ჩართულმა $i-$მა პიროვნებამ მიაღწია $(x+1)$ ასაკს
$\xi_i(x) =$

0,თუ სქემაში ჩართულმა $i-$მა პიროვნებამ ვერ მიაღწია$(x+1)$ ასაკს.

გასაგებია, რომ ყოველი ξ_i არის ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე და

$$P\{\xi_i(x) = 1\} = p_x$$
$$P\{\xi_i(x) = 0\} = q_x$$

ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $\xi_i(x)$, შემთხვევითი სიდიდეები ერთმანეთზე დამოუკიდებელია. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$N_{x+1} = \sum_{i=1}^{N_x} \xi_i(x)$$

ანუ (N_{x+1})-ს აქვს ბინომური განაწილება

$$P(N_{x+1} = k / N_x) = C_{N_x}^k p_x^k q_x^{N_x - k}, \qquad k = 0,1,..., N_x \qquad (24)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ (N_{x+t+1}) პირობით განაწილებას პირობაში N_{x+t}, სადაც $t = 1,2,..., \omega - x - 1$

$$P\{N_{x+t+1} = k / N_{x+t}\} = C_{N_{x+t}}^k p_{x+t}^k q_{x+t}^{N_{x+t} - k}, \qquad k = 0,1,..., N_{x+t} \qquad (25)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ Y_1, Y_2 და $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ სიდიდეებს რთული კონსტრუქცია აქვთ და მათი ალბათური განაწილების ანალიზურად დადგენა არ არის ადვილი, მაგრამ იმის წყალობით, რომ ჩვენ ვიცით ყოველი N_{x+t}-ს განაწილება და Y_1, Y_2 ფაქტიურად N_{x+t}-ების ჯამებია, R_α კვანტილების დასადგენად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კომპიუტერული მოდელირების მეთოდი.

როგორც ცნობილია, ყოველ თანამედროვე კომპიუტერს შეუძლია [0:1] შუალედზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა გენერირება. აქედან გამომდინარე ჩვენ სინამდვილეში შეგვიძლია ნებისმიერად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გენერირება.

ამ მეთოდის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია გავათამაშოთ (N_{x+1}) შემთხვევითი სიდიდე, რისთვისაც გამოვიყენებთ (24)-ე ალბათურ განაწილებას. p_x და q_x მნიშვნელობებს სხვადასხვა x-ებისათვის ავიღებთ მოკვდაობის ცხრილიდან, ხოლო N_x მნიშვნლობას შევარჩევთ პრაქტიკული ამოცანის შესაბამისად. გათამაშების შედეგად მივიღებთ (N_{x+1})-ის გარკვეულ მნიშვნელობას, რის საფუძველზეც იგივე მეთოდით და (25)-ე განაწილების გამოყენებით (როცა $t = 1$) გავათამაშებთ N_{x+2}-ის მნიშვნელობას და ა. შ. გათამაშების ერთი სერიის შედეგად მივიღებთ

$$N_x, N_{x+1}, ..., N_\omega$$

მიმდევრობის კონკრეტულ რიცხვით რეალიზაციას. ამის შემდეგ პრაქტიკული ამოცანიდან გამომდინარე შერჩეული საპროცენტო

განაკვეთისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობა.

ჩვენს მიერ შედგენილი პროგრამა ახორციელებს ზემოთ აღწერილი გათამაშების 1000 სერიას და შესაბამისად ითვლის $\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)$ შემთხვევითი სიდიდის 1000 რიცხვით რეალიზაციას, ამის შემდეგ პროგრამა ალაგებს ამ რეალიზაციებს ზრდადობის მიხედვით და ირჩევს მათ შორს ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც აღემატება რეალიზაციათა $(1-\alpha)100\%$. მაგ. თუ გვინდა 95%-იანი R_α კვანტილის პოვნა რეალიზაციათა შორის ვირჩევთ ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც აღემატება მხოლოდ 50 რეალიზაცია. ამ ალგორითმზე აგებული კომპიუტერული პროგრამა ადვილი გამოსაყენებელია პრაქტიკაში და (23) ფორმულის თანახმად საშუალებას გვაძლევს მოცემული x-სთვის, N_x-სთვის, i-სთვის და n-სთვის გამოვთვალოთ მომავალი წლიური S პენსიის ნაწილი, რომელიც ბრუტო-პრემიის სახით უნდა გადაიხადონ ყოველწლიურად სქემის მონაწილეებმა და რომელიც უზრუნველყოფს საპენსიო ვალდებულებების გასტუმრებას მოცემული α ალბათობით.

§9 შედარება

ჩატარებული გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ მოკვდაობის ცხრილის გარდაქმნის ევრისტული მეთოდი ყოფილა სავსებით გამართლებული. კერძოდ აღმოჩნდა, რომ მოკვდაობის 10%-იანი ხელოვნური შემცირება და მიღებული ცხრილით ნეტო-პრემიის გამოყენება უზრუნველყოფს გაკოტრების ალბათობის 0.01-ის მნიშვნელობას. შესაბამისად 7%-იანი შემცირება უზრუნველყოფს არგაკოტრებას ალბათობით 0.95 და 3%-იანი შემცირება – 0.9.

ამგვარად, შეიძლება შემდეგი დასკვნის გამოტანა. სიცოცხლის დაზღვევაში მიღებული ტაბულის გარდაქმნის მეთოდი არის უაღრესად მარტივი და პრაქტიკაში ადვილად გამოსაყენებელი და ამავე დროს,

როგორც ჩვენმა გამოკვლევამ გვიჩვენა უზრუნველყოფს არგაკოტრების ალბათობის მაღალ დონეს.