საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ინსტიტუტი
გამოყენებითი მათემატიკის კათედრა

ზვიად ჭინჭარაული

# ჯამური პრეტენზიების განაწილების აღწერა კოლექტიური რისკის მოდელში

სპეციალობა 0102 - ფინანსური მათემატიკა
სადიპლომო ნაშრომი
ბაკალავრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
ხელმძღვანელი: ფ.მ.მ.კ. დოც. გ.მირზაშვილი

თ ბ ი ლ ი ს ი
2003

## შესავალი

სადაზღვევო კომპანიის საქმიანობაში ხშირია მოვლენები, რომელთა ყოფაქცევაც შემთხვევითი სიდიდეების ჯამებით აღიწერება. მაგალითად, სადაზღვევო ტარიფების დადგენის ან კომპანიის გადახდისუნარიანობის ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან შემადგენელ ნაწილს ჯამური ზარალის ანალიზი წარმოადგენს; კომპანიის გაკოტრების მომენტის აღმწერი რისკის პროცესი სხვა არაფერია, თუ არა კომპანიის აქტივებს დაკლებული დროის მოცემულ მომენტამდე დაგროვილი ჯამური ზარალის სიდიდე; გადაზღვევის Stop-Loss სახეობაში ამოსავალს პრიორიტეტის განსაზღვრაში სწორედ ჯამური ზარალი შეადგენს; ექსტრემალური ზარალების გადაზღვევისას საქმე გვაქვს რამდენიმე დიდი პრეტენზიით შედგენილი ჯამური ზარალის გადაზღვევასთან და ა.შ.

მაგრამ თუ რისკის ინდივიდუალურ მოდელებში განსაზღვრულია ზემოთ ნახსენები ჯამების შესაკრებთა რაოდენობა, კოლექტიურ მოდელებში შესაკრებთა რაოდენობასაც შემთხვევა განსაზღვრავს, ანუ საანგარიშო პერიოდის განმავლობაში მომხდარ სადაზღვევო შემთხვევათა რაოდენობა შემთხვევითი სიდიდეა. მაშასადამე, ამ მოდელში ჯამური ზარალის ანალიზისათვის საჭიროა ორგვარი შემთხვევითობის, პრეტენზიათა (ზარალების) რაოდენობისა და პრეტენზიათა სიდიდეების აღრიცხვა. როგორც წესი, ამ შემთხვევაში ბუნებრივია პრეტენზიათა რაოდენობისა და პრეტენზიათა სიდიდეების დამოუკიდებლობის დაშვება, რასაც ჯამური ზარალებისათვის ე.წ. შედგენილ განაწილე-ბებამდე (Compound Distributions) მივყავართ.

ამგვარად, ასეთი ჯამების განაწილებათა გამოთვლა სადაზღვევო კომპანიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას შეადგენს მაშინაც კი, როდესაც შესაკრებთა რაოდენობა საკმარისად დიდია, რადგანაც შესაკრებთა მძიმე-კუდიანი განაწილებების შემთხვევაში (რაც ტიპიურია დაზღვევის ბევრი სახეობისათვის) ცენტრალური ზღვარითი თეორემის პირობები ირღვევა.

წინამდებარე ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს შედგენილ განაწილებათა რეკურსიული ფორმულების მიღება პრეტენზიათა რაოდენობის სხვადასხვა განაწილების დროს.

ვქვათ, $N$ აღნიშნავს კომპანიის საანგარიშო პერიოდის პრეტენზიათა რაოდენობას, რომელიც არაუარყოფით მთელმნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო $Y_i$-ები ცალკეული პრეტენზიებს სიდიდეებია, რომლებიც დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული, დადებითი (არაუარყოფით), მთელმნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეებია. ამ ნაშრომის ფარგლებში ასევე, იგულისხმება, რომ ისინი დამოუკიდებელია $N$-საგანაც. მაშინ ჩვენთვის საინტერესო პორტფელის (ანუ სადაზღვევო კომპანიის მიერ დადებულ სადაზღვევო ხელშეკრულებათა ერთობლიობის) ჯამური პრეტენზია, $S_N$, შემდეგნაირად განიმარტება:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i \, . \tag{1.1}$$

შევნიშნოთ, რომ $Y$-ების მთელმნიშვნელიანობა დისკრეტულობის ზოგადობას არ ზღუდავს, რადგან ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება მოხერხებული ფულადი ერთეულის არჩევით, ხოლო $N$-ის და $Y$-ების დამოუკიდებლობა კი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იმას ნიშნავს, რომ $S_N$ ჯამურ პრეტენზიას აქვს ე.წ. შედგენილი განაწილება, ანუ

$$P\{S_N \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_Y^{n*}(x) \, , \tag{1.2}$$

სადაც $p_n$-ით აღნიშნულია $N$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება:

$$p_n = P\{N = n\} \quad , \qquad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad , \quad p_{-n} = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathrm{N} \, , \tag{1.3}$$

ხოლო $F_\xi(x)$-ით (და შემდგომში, $f_\xi(x)$-ით) აღნიშნულია $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია (სიმკვრივე). $F_\xi^{n*}(x)$ აღნიშნავს $\xi$-ის განაწილების $n$-ჯერადი ნახვევის ოპერაციას.

გადავწეროთ (1.2) ფორმულა შემდეგნაირად:

$$F_{S_N}(x) = P\{S_N \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_{S_n}(x) \tag{1.4}$$

შევნიშნოთ, რომ $Y$-ების დამოუკიდებლობის გამო $F_{S_n}(x)$-სათვის ადგილი აქვს შემდეგ რეკურენტულ თანადობას:

$$F_{S_n}(x)=\int_0^x F_{S_{n-1}}(x-y)dF_Y(y) \tag{1.5}$$

იმისათვის, რომ რამე ვთქვათ $F_{S_N}(x)$ განაწილებაზე, დავუშვათ, რომ $p_n$-ებიც მოცემულია რეკურენტულად მაგალითად, ასეთი წესით: რაღაც დადებითი $a$ რიცხვისათვის

$$p_n=a\cdot p_{n-1}. \tag{1.6}$$

მაშინ $(1.4)$ და $(1.5)$-დან გასაგებია, რომ

$$F_{S_N}(x)=p_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cdot\int_0^x F_{S_{n-1}}(x-y)dF_Y(y)=p_0+a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}\cdot\int_0^x F_{S_{n-1}}(x-y)dF_Y(y)=$$

$$=p_0+a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cdot\int_0^x F_{S_n}(x-y)dF_Y(y)=p_0+a\cdot\int_0^x F_{S_N}(x-y)dF_Y(y),$$

ანუ როგორც ვხედავთ, $F_{S_N}(x)$-სათვის მივიღებთ ე.წ. განმაახლებელ (Renewal) განტოლებას,

$$F_{S_N}(x)=p_0+a\cdot\int_0^x F_{S_N}(x-y)dF_Y(y), \tag{1.7}$$

რომელიც სხვა არაფერია, თუ არა ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლება, რომლის ამოხსნის ანალიზური მეთოდებიც ცნობილია ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიიდან.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ თუ $p_n$ ალბათობებიც მოცემული იქნება რეკურენტული წესით, შესაძლებელი იქნება შედგენილ განაწილებათა გამოთვლაც; წინააღმდეგ შემთხვევაში, $F_{S_N}(x)$ ალბათობების თვლა მოითხოვს $F_Y(y)$-ის ყველა რიგის ნახვევის გამოთვლას, რაც პრაქტიკულად მხოლოდ ე.წ. უსასრულოდ დაყოფადი $F_Y(y)$ განაწილებებისთვის არის შესაძლებელი.

ასეთ მოსაზრებებზე დაყრდნობით, [2] ნაშრომში Panjer-მა განიხილა პრეტენზიის რაოდენობათა განაწილებები, რომლებიც შემდეგი რეკურენტული წესით მოიცემა:

$$p_n=p_{n-1}\cdot\left(a+\frac{b}{n}\right),\quad n=1,2,\ldots\quad, \tag{1.8}$$

სადაც $p_0$, $a$ და $b$ ისეთებია, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad , \qquad p_n > 0 \, , \quad \forall n \in \mathrm{N} \, . \tag{1.9}$$

$(1.8)$-ით მოცემულ განაწილებათათვის (რომელსაც ჩვენ ქვემოთ Panjer-ის განაწილებათა კლასად მოვიხსენიებთ) ზემოაღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია $S_N$-ის განაწილების სიმკვრივის (ალბათობათა განაწილების) გამოსათვლელი შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$f_{S_N}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot f_Y{}^n(0) \, ,$$

$$f_{S_N}(x) = P\{S_N = x\} = \frac{1}{1 - a \cdot f_Y(0)} \sum_{y=1}^{x} \left( a + \frac{by}{x} \right) \cdot f_Y(y) \cdot f_{S_N}(x-y) \, , \quad x = 1,2,... \tag{1.11}$$

ცნობილია, რომ Panjer-ის განაწილებათა კლასი შედგება გადაუგვარებელ განაწილებათა მხოლოდ სამი ოჯახისაგან. ესენია: პუასონის, ბინომური და უარყოფითი ბინომური განაწილებები, (რომელთათვისაც ცნობილია ალბათობათა გამოსათვლელი პირდაპირი ფორმულებიც და ამ განაწილებათა მაწარმოებელი ფუნქციის სახეებიც). სადაზღვევო პრაქტიკაში არსებობდა უამრავი მაგალითი იმისა, რომ პრეტენზიათა რაოდენობის განაწილება არ ეკუთვნის ზემოთ ჩამოთვლილ არცერთ განაწილებას. ამდენად, საჭირო გახდა განაწილებათა სხვა მსგავსი ოჯახების შემოღება და მათთვის $(1.11)$-ის ანალოგიური ფორმულების მიღება. ასეთი კლასების მაგალითებია Sundt-ის, Ramsay-ის, Willmot-Panjer-ის, Hesselager-ის, Wang-Sobrero-ს და სხვა კლასები, რომლებსაც ერთი საერთო თვისება ახასიათებთ (იხ. [10]): მათი განაწილება მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ფორმით (ამ ტიპის რეკურსიას ჩვენ $(a,b,c)$-ტიპის რეკურსიას ვუწოდებთ)

$$p_n = (a + b \cdot c_n) \cdot p_{n-1} \, . \tag{1.12}$$

განსხვავება ამ კლასებს შორის იმაშია, თუ როგორია $(1.12)$-ში შემავალი $c_n$ მიმდევრობა (მაშასადამე, ცხადია, სხადასხვაა შესაბამისი (1.11) ტიპის თანადობებიც). მაგრამ იმის დასადგენად, თუ როგორია (1.11) ტიპის თანადობა ზოგადი $c_n$ მიმდევრობისათვის, რაიმე ერთიანი მიდგომა დღემდე არ არსებობდა. გარდა ამისა, არსებობს განაწილებათა ოჯახები, რომელთა ალბათობებისათვისაც არცთუ ადვილია $c_n$ მიმდევრობის ცხადი სახის და მაშასადამე, $(a,b,c)$-ტიპის რეკურსიის ცხადი სახით ჩაწერა. მაგალითად, ასეთია

სადაზღვევო პრაქტიკაში ერთ-ერთი ფართოდ გავრცელებული კლასი, პუასონის შერეული განაწილება, რომლისათვისაც $(a,b,c)$-ტიპის რეკურსიის მიღება ხერხდება შემრევი განაწილების მხოლოდ კონკრეტულ შემთხვევებში (იხ. [10]). ასეთივეა ე.წ. პუასონის განზოგადებული განაწილება (რომლისათვისაც მხოლოდ (1.12) ფორმით ჩაწერას მიეძღვნა რამდენიმე სამეცნიერო პუბლიკაცია).

მეორეს მხრივ, ცნობილია უკანასკნელ განაწილებათა მაწარმოებელი ფუნქციების ზოგადი სახეები და შედგენილი განაწილების მაწარმოებელი ფუნქციის ჩაწერის ზოგადი ფორმა:

$$\varphi_S(t) = \varphi_N(\varphi_Y(t)) . \tag{1.13}$$

მაშასადამე, შედგენილი ალბათობების დასადგენად საკმარისია ამ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების დათვლა $t = 0$ წერტილში. ამდენად ჩვენი მიდგომა მდგომარეობს შემდეგში: იქ სადაც ეს შესაძლებელია, გამოვთვალოთ შედგენილი განაწილებები ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქციების საშუალებით. ამ მიდგომის მთავარი სირთულე (1.13)-ით მოცემული რთული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების პოვნაშია.

ნაშრომის II ნაწილში მოცემულია (1.11)-ისა და მსგავსი ტიპის Sundt-ის რეკურენტული ფორმულების მიღების ავტორისეული გზების შედარებით დაწვრილებითი აღწერა, რაც კეთდება იმისათვის, რომ ეს შედეგები და მათი მიღების გზები შედარდეს ნაშრომის III ნაწილში შემოთავაზებულ ჩვენი მეთოდით მიღებულ შედეგებს.

კერძოდ, III ნაწილში საუბარია ზოგადი $(a,b,c)$-ტიპის რეკურსიის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქციისათვის (1.13)-დან შედგენილ განაწილებათა რეკურსიის მიღებაზე . რთული (1.13) ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების პოვნის სირთულე ამ ზოგად შემთხვევაში დაიყვანება ფუნქციათა ნამრავლების მაღალი რიგის წარმოებულების დათვლაზე.

## II ნაწილი

მოვიყვანოთ Panjer-ის მიერ გამოყვანილი შედგენილი (ჯამური) პრეტენზიების განაწილების რეკურსიული ფორმულის დამტკიცება. შევნიშნით რომ

$f_Y^{\,n*}(0) = P\{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0\} = f_Y^{\,n}(0)$ რადგანაც $Y_i$ –ები ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. აქედან:

$$f_{S_N}(0) = P\{S = 0\} = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{N = n\} P\{S = 0 / N = n\} =$$

$$= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_Y^{n*}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_Y^{n}(0) \qquad (2.1)$$

ხოლო, როცა $k = 1,2,3...$

$$f_{S_N}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_Y^{\,n*}(k) = p_1 f_Y(k) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} f_Y^{(n+1)*}(k) \qquad (2.2)$$

ამ გამოსახულებაში (1.8) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$f_{S_N}(k) = (a+b) p_0 f_Y(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a + \frac{b}{n+1} \right) p_n f_Y^{(n+1)*}(k)$$

ეხლა ვნახოთ, რომ ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი

$$E\left[ Y_1 \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] = \frac{k}{n} \qquad (2.3)$$

რადგანაც $Y_i$ –ები ერთგვაროვანი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია ამიტომ

$$E\left[ Y_j \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] = E\left[ Y_1 \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] \quad \text{როცა} \quad j \neq 1$$

აქედან

$$\sum_{j=1}^{n} E\left[ Y_j \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] = E\left[ \sum_{j=1}^{n} Y_j \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] = k$$

ხოლო, როცა $n = 2,3,4,...$

$$E\left[ Y_1 \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right] = \sum_{j=0}^{y} j f_Y(j) f_Y^{(n-1)*}(y-j) / f_Y^{n*}(k) \qquad (2.4)$$

რაც გამომდინარეობს შემდეგიდან

$$P\left\{ Y_1 = j \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right\} = P\left\{ Y_1 = j \,\&\, \sum_{i=2}^{n} Y_i = k - j \right\} \bigg/ P\left\{ \sum_{i=1}^{n} Y_i = k \right\} = f_Y(j) f_Y^{(n-1)*}(k-j) / f_Y^{n*}(k)$$

(2.3)–დან და 92.4)–დან მივიღებთ

$$\frac{k}{n} f_Y^{n*}(k) = \sum_{j=0}^{y} j f_Y(j) f_Y^{(n-1)*}(k-j) \qquad (2.5)$$

ამ ტოლობას თუ გამოვიყენებთ (2.2)−ში

$$f_{S_N}(k) = (a+b)p_0 f_Y(k) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_Y^{n*}(k-j) =$$

$$= (a+b)p_0 f_Y(k) + \sum_{j=0}^{y} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_Y^{n*}(k-j)$$

ჯამიდან გამოვყოთ $k$−ური წევრი

$$f_{S_N}(k) = (a+b)p_0 f_Y(k) + \sum_{j=0}^{y-1} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_Y{}^{n*}(k-j) + (a+b) f_Y(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_Y(0)$$

$(2.1)$-დან გამომდინარე $\sum_{n=1}^{\infty} p_n f_Y(0) = f_{S_N}(0) - p_0$ აქედან

$$f_{S_N}(k) = (a+b)p_0 f_Y(k) + \sum_{j=0}^{y-1} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j) + (a+b) f_Y(k) \left(f_{S_N}(0) - p_0\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{y-1} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j) + (a+b) f_Y(k) f_{S_N}(0)$$

შესაკრებთა გაერთიანების შემდეგ მივიღებთ:

$$f_{S_N}(k) = \sum_{j=0}^{y} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j)$$

გამოვყოთ ჯამის პირველი წევრი

$$f_{S_N}(k) = a f_Y(k) f_{S_N}(k) + \sum_{j=0}^{y} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j)$$

$$f_{S_N}(k) - a f_Y(k) f_{S_N}(k) = \sum_{j=0}^{y} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j)$$

$$f_{S_N}(y) = \frac{1}{1 - a f_Y(k)} \sum_{j=0}^{y} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_Y(j) f_{S_N}(k-j) \qquad (2.6)$$

ამრიგად მივიღეთ პანჯერის შედგენილი განაწილების რეკურსიული ფორმულა

იგივე მსჯელობით დავამტკიცოთ Sundt−ის მიერ გამოყვანილი შედგენილი პრეტენზიების განაწილების რეკურსიული ფორმულა [6].

(2.1)−ის თანახმად

$$f_{S_N}(k)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n f_Y^{\,n*}(k) \qquad (2.7)$$

და ჩავსვავთ Sundt-ის კლასის ალბათობათა რეკურენტულ თანაფარდობას

$$p_n=\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{n}\right)\cdot p_{n-i}\ , \quad n=1,2,...$$

მივიღებთ

$$f_{S_N}(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{n}\right)p_{n-i}f_Y^{n*}(k)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=i}^{\infty}p_{n-i}\left(a_i+\frac{b_i}{n}\right)f_Y^{n*}(k)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=i}^{\infty}p_{n-i}E\left[a_i+\frac{b_i}{i}\frac{S_i}{k}\middle|S_i=k\right]f_Y^{n*}(k)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}p_{n-i}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)f_Y^{(n-i)*}(k-j)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)\sum_{n=i}^{\infty}p_{n-1}f_Y^{(n-i)*}(k-j)=\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)f_{S_N}(k-j)$$

ამრიგად

$$f_{S_N}(k)=\sum_{j=0}^{k}f_{S_N}(k-j)\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)$$

ამ ტოლობას შევხედოთ როგორც განტოლება $f_{S_N}(k)$–ის მიმართ და ამოვხსნათ იგი:

$$f_{S_N}(k)=f_{S_N}(k)\sum_{i=1}^{m}a_i f_Y^{i*}(0)+\sum_{j=1}^{k}f_{S_N}(k-j)\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)$$

$$f_{S_N}(k)-f_{S_N}(k)\sum_{i=1}^{m}a_i f_Y^{i*}(0)=\sum_{j=1}^{k}f_{S_N}(k-j)\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j)$$

$$f_{S_N}(k)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i f_Y^{i*}(0)}\sum_{j=1}^{k}f_{S_N}(k-j)\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{j}{k}\right)f_Y^{i*}(j) \qquad (2.8)$$

გამოყვანილია Sundt–ის შედგენილი პრეტენზიების განაწილების რეკურსიული ფორმულა.

## III თავი

წინა თავში მოყვანილი იყო ზარალების რაოდენობისათვის Panjer-ისა და Sundt-ის განაწილებათა კლასების შემთხვევაში ჯამური პრეტენზიების შედგენილ განაწილებათა გამოსათვლელი რეკურსიული ფორმულების მიღების მათივე გზა. ამ თავში ნაჩვენებია,

რომ ეს ფორმულები წარმოადგენს უფრო ზოგადი სახის, კერძოდ კი, ფუნქციონალურ ტოლობათა კერძო შემთხვევებს (როცა ფუნქციათა არგუმენტები ტოლობის ორივე მხარეში არის $t = 0$). როგორც ქვემოთ დავინახავთ, ეს ფუნქციები წარმოადგენს ამა თუ იმ განაწილებათა კლასის ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქციების მაღალი რიგის წარმოებულებს.

მთელ არაუარყოფით მნიშვნელობებიანი $G$ შემთხვევითი სიდიდის მაწარმოებელი ფუნქცია განიმარტება როგორც შემდეგი ჯამი:

$$\varphi_G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot t^n , \qquad 0 \le t \le 1, \tag{3.1}$$

სადაც $p_n = P\{G = n\}, n \ge 0$.

ცხადია, რომ

$$\frac{\varphi_G{}^{(k)}(0)}{k!} = p_k , \tag{3.2}$$

სადაც ზედა $(k)$ ინდექსი აღნიშნავს ფუნქციის $k$-ჯერ გაწარმოებას.

ზემოთ ნახსენები ფუნქციონალური ტოლობების მისაღებად ჩვენ დაგვჭირდება შედგენილ განაწილებათა მაწარმოებელი ფუნქციის კარგად ცნობილი ფორმულა, რომელიც მოგვყავს შემდეგი თეორემის სახით:

**თეორემა 3.1:** თუ $S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ ჯამში $N$ და $Y$ შესაკრებები მთელ არაუარყიფით მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეებია და $N$ და $Y$-ები დამოუკიდებელია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi_{S_N}(t) = \varphi_N(\varphi_Y(t)) \tag{3.3}$$

**დამტკიცება** გამომდინარეობს ტოლობათა შემდეგი ჯაჭვიდან:

$$\varphi_{S_N}(t) = E\left[t^{S_N}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{N} t^Y\right] = E\left[\prod_{i=1}^{N} E\left[t^Y \middle| N\right]\right] = E\left[\prod_{i=1}^{N} \varphi_Y(t)\right] = E\left[(\varphi_Y(t))^N\right] = \varphi_N(\varphi_Y(t)) .$$

(3.3) ტოლობიდან გასაგებია, რომ (1.4) სახის შედგენილი განაწილებების გამოსათვლელად საკმარისია $\varphi_N(t)$ და $\varphi_Y(t)$ მაწარმოებელი ფუნქციების ანალიზური სახეების ცოდნა და (3.3) რთული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების გამოთვლა. სამწუხაროდ, ამ წარმოებულების გამოთვლა, მოცემული ცხადი ანალიზური სახის მქონე

$\varphi_N(t)$ და $\varphi_Y(t)$ ფუნქციების შემთხვევაშიც კი, საკმარისად რთულია და მოითხოვს დამატებით ძალისხმევას (თუმცა არსებობს ფუნქციათა გაწარმოების მიახლოებითი მეთოდებიც).

ზემოხსენებული ტოლობების მიღების იდეა მდგომარეობს რთულ ფუნქციათა მაღალი რიგის წარმოებულების პოვნაში მათი უშუალო გაწარმოებისაგან თავის არიდებით; შედეგად, რთული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები გამოისახება მისივე წინა, დაბალი რიგის წარმოებულების საშუალებით. ჩვენთვის საინტერესო ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია რთული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების გამოსათვლელი ასეთი რეკურენტული ფორმულების მიღება. ამის დემონსტრირებას ჩვენ მოვიყვანთ კერძო განაწილებებზე.

I. **Panjer-ის განაწილებათა შემთხვევა**. ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 3.2:** თუ $N$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს Panjer-ის განაწილება, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \left( a + b\frac{j}{k} \right) \varphi_Y^{(j)}(t) \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) . \qquad (3.4)$$

**დამტკიცება:** როგორც ცნობილია (იხ. მაგ., [10]), Panjer-ის განაწილებათა კლასის მაწარმოებელ ფუნქციას აქვს ასეთი სახე:

$$\varphi_N(t) = \left( \frac{1-a}{1-at} \right)^{\frac{a+b}{a}} . \qquad (3.5)$$

მაშინ (3.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi_{S_N}(t) = \left( \frac{1-a}{1-a\varphi_Y(t)} \right)^{\frac{a+b}{a}} . \qquad (3.6)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\varphi'_{S_N}(t) = \left( \frac{1-a}{1-a\varphi_Y(t)} \right)^{\frac{a+b}{a}} \frac{(a+b)\varphi'_Y(t)}{1-a\varphi_Y(t)} ,$$

ანუ

$$\varphi'_{S_N}(t) = \varphi_{S_N}(t) \frac{(a+b)\varphi'_Y(t)}{1-a\varphi_Y(t)} .$$

გადავწეროთ უკანასკნელი ტოლობა ასეთნაირად:

$$\varphi'_{S_N}(t)\cdot\big(1-a\varphi_Y(t)\big)=(a+b)\cdot\varphi'_Y(t)\cdot\varphi_{S_N}(t) \tag{3.7}$$

შევნიშნოთ, რომ (3.6) ტოლობის ორივე მხარე ((3.3)-საგან განსხვავებით) არ შეიცავს რთულ ფუნქციებს და წარმოადგენს ფუნქციათა ნამრავლებს. ამიტომ ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით ფუნქციათა ნამრავლის მაღალი რიგის გაწარმოების შესახებ, მარტივია მათი $k$-ური რიგის წარმოებულების ჩაწერა. ცხადია, რომ ყოველი $k \geq 0$-სათვის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j\big(1-a\varphi_Y(t)\big)^{(j)}\varphi_{S_N}^{(k-j+1)}(t)=(a+b)\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t). \tag{3.8}$$

შევხედოთ ამ ტოლობას, როგორც განტოლებას $\varphi_{S_N}$-ის უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ და ამოვხსნათ ის:

$$\big(1-a\varphi_Y(t)\big)\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t)+\sum_{j=1}^{k} C_k^j\big(1-a\varphi_Y(t)\big)^{(j)}\varphi_{S_N}^{(k-j+1)}(t)=(a+b)\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t),$$

საიდანაც

$$\big(1-a\varphi_Y(t)\big)\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t)=a\sum_{j=1}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j+1)}(t)+(a+b)\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$=a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1}\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+(a+b)\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$=a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1}\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+a\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+b\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$=a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j}\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1}\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)\varphi_Y^{(j+1)}(t)+a\varphi_Y^{(k+1)}(t)\varphi_{S_N}(t)+b\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$=a\sum_{j=0}^{k-1}\big(C_k^j+C_k^{j+1}\big)\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+a\varphi_Y^{(k+1)}(t)\varphi_{S_N}(t)+b\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$=a\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j+1}\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+b\sum_{j=0}^{k} C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t),$$

სადაც ბოლო ტოლობაში ბინომური კოეფიციენტებისათვის გამოვიყენეთ შემდეგი ტოლობა:

$$C_k^j+C_k^{j+1}=C_{k+1}^{j+1}. \tag{3.9}$$

ცხადია, რომ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t)=\frac{1}{1-a\varphi_Y(t)}\cdot\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j+1}\cdot\left(a+b\cdot\frac{j+1}{k+1}\right)\cdot\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)=$$

$$= \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j} \cdot \left( a + b \cdot \frac{j}{k+1} \right) \cdot \varphi_Y^{(j)}(t) \varphi_{S_N}^{(k+1-j)}(t)$$

და თუ გადავწერთ ამ ტოლობას $k$-სათვის, მივიღებთ (3.4)-ს.

ამრიგად თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი:** თუ $N$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს Panjer-ის განაწილება, მაშინ $f_{S_N}(k) = P\{S_N = k\}$ ალბათობებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა (Panjer-ის რეკურსიული ფორმულა):

$$f_{S_N}(k) = \frac{1}{1 - af_Y(0)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \left( a + b \cdot \frac{j}{k} \right) \cdot f_Y(j) \cdot f_{S_N}(k - j) . \qquad (3.10)$$

**დამტკიცება.** გავყოთ (3.4) ტოლობის ორივე მხარე $k!$-ზე. მივიღებთ

$$\frac{\varphi_{S_N}^{(k)}(t)}{k!} = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \left( a + b\frac{j}{k} \right) \cdot \frac{\varphi_Y^{(j)}(t)}{j!} \cdot \frac{\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)}{(k-j)!} .$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $\frac{\varphi_\xi^{(r)}(t)}{r!} = P\{\xi = r\}$ და უკანასკნელ ტოლობას ჩავწერთ $t$ = 0-სათვის, ცხადია მივიღებთ დასამტკიცებელს.

## II. რეკურენტულ განაწილებათა განზოგადებული კლასი.

როგორც ეს მაგალითი გვიჩვენებს, შედგენილ განაწილებათა მიღების ეს გზა უნდა მუშაობდეს უფრო ზოგად შემთხვევებშიც. [10] ნაშრომში მოყვანილია პრეტენზიების რაოდენობის ალბათობათა განზოგადებული რეკურსიული ფორმულის შესაბამისი განაწილების მაწარმოებელი ფუნქციის აღწერა. კერძოდ, შესავალში მოყვანილი პრეტენზიათა რაოდენობის განაწილებათა კლასების (Panjer, Ramsay, Sundt, ... ) შესაბამისი რეკურსიული ფორმულები შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც კერძო შემთხვევები რეკურსიული ფორმულისა:

$$p_n = \left( a + b \cdot c_n \right) p_{n-1} , \qquad (3.11)$$

სადაც $a, b$ და $c_n$ უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ მოთხოვნებს:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \;\;, \qquad p_n > 0 \;\;, \quad n = 0,1,...$$

[10] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ (3.11)–ის შესაბამისი მაწარმოებელ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$\varphi_N(t) = \frac{1 - a - b\int_t^1 \psi(s)ds}{1 - at}, \qquad (3.12)$$

სადაც

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1} \cdot p_n \cdot t^n . \qquad (3.13)$$

განაწილებათა (3.11) განზოგადებული კლასისთვის შესაძლებელია შედგენილ განაწილებათა რეკურენტული ფორმულის მიღება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

**თეორემა 3.3:** თუ (3.12) წარმოდგენაში $\psi$ გენერატორს (იხ. [10]) გააჩნია წარმოებულები $k$-ურ რიგამდე ჩათვლით, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j)}(t) \left( a\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\frac{j}{k}[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} \right) \qquad (3.14)$$

**დამტკიცება:** (3.3) და (3.12) ტოლობებიდან გავქვს, რომ ამ შემთხვევაში,

$$\varphi_{S_N}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \left( 1 - a - b\int_{\varphi_Y(t)}^{1} \psi(s)ds \right),$$

ანუ

$$(1 - a\varphi_Y(t))\varphi_{S_N}(t) = 1 - a - b\int_{\varphi_Y(t)}^{1} \psi(s)ds .$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ ტოლობას

$$(1 - a\varphi_Y(t))\varphi_{S_N}'(t) - a\varphi_Y'(t)\varphi_{S_N}(t) = b\varphi_Y'(t)\psi(\varphi_Y(t)),$$

ან მარტივი არითმეტიკული გარდაქმნებით,

$$(1 - a\varphi_Y(t))\varphi_{S_N}'(t) = \varphi_Y'(t)[a\varphi_{S_N}(t) + b\psi(\varphi_Y(t))]. \qquad (3.15)$$

ამ განზოგადებული სიტუაციისათვის (3.15) წარმოადგენს (3.7) ტოლობის ანალოგს: ის იძლევა იმის საშუალებას, რომ $\varphi_{S_N}$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულებისათვის კვლავ გამოვიყენოთ ლაიბნიცის ფორმულა და მივიღოთ (3.8)-ის ანალოგიური ფუნქციონალური ტოლობა:

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(1 - a\varphi_Y(t)\right)^{(j)} \varphi_{S_N}^{(k+1-j)}(t) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[a\varphi_{S_N}(t) + b\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} \ . \qquad (3.16)$$

დასახული მიზნის მიღწევის ბოლო ეტაპს აქაც შეადგენს $(3.16)$ განტოლების ამოხსნა $\varphi_{S_N}$ ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ (უფრო სწორედ მისი გამსახვა დანარჩენი დაბალი რიგის წარმოებულებით):

$$\left(1 - a\varphi_Y(t)\right)\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t) + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \left(1 - a\varphi_Y(t)\right)^{(j)} \varphi_{S_N}^{(k+1-j)}(t) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[a\varphi_{S_N}(t) + b\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)}$$

ანუ

$$\left(1 - a\varphi_Y(t)\right)\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t) = a\sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-(j-1))}(t) + \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[a\varphi_{S_N}(t) + b\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} =$$

$$= a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + \sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[a\varphi_{S_N}(t) + b\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} =$$

$$= a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + a\sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} =$$

$$= a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + a\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + \varphi_Y^{(k+1)}(t)\varphi_{S_N} t)$$

$$+ b\sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} =$$

$$= a\sum_{j=0}^{k-1} \left(C_k^{j+1} + C_k^j\right)\varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + \varphi_Y^{(k+1)}(t)\varphi_{S_N}(t) + b\sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} \ .$$

კვლავ $(3.9)$ კომბინატორული ტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$\left(1 - a\varphi_Y(t)\right)\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t) = a\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j+1} \varphi_Y^{(j+1)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\sum_{j=0}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k-j)} \ ,$$

საიდანაც მარტივი გარდქმნებით მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^j \cdot \varphi_Y^{(j)}(t)\left(a\varphi_{S_N}^{(k+1-j)}(t) + b \cdot \frac{j}{k+1}[\psi(\varphi_Y(t))]^{(k+1-j)}\right).$$

ცხადია, დასამტკიცებელი მიიღება უკანასკნელ ტოლობაში ყველგან $k+1$-ის $k$-თი შეცვლით.

ეხლა დავაკვირდეთ $(3.13)$-ს. ცხადია, რომ თუ $c_n$ არ არის დამოკიდებული $p_n$ ალბათობებზე, მაშინ $\psi$ ფუნქცია აუცილებლად იქნება დამოკიდებული ყველა ამ

ალბათობაზე და მაშასადამე, აზრიანია ვიფიქროთ, რომ იგი დამოკიდებულია მთლიანად $\varphi_N$ ფუნქციაზე, ანუ გარკვეული $g$ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$\psi(t) = g(\varphi_N(t)) \tag{3.17}$$

ასეთ შემთხვევაში, (3.14) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{(1 - a\varphi_Y(t))} \sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j)}(t) \left( a\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\frac{j}{k}[g(\varphi_{S_N}(t))]^{(k-j)} \right) \tag{3.18}$$

**შედეგი:** თუ $g$ არის იდენტური ფუნქცია, ანუ $g(x) = x$, მაშინ 3.18-დან მიიღება Panjer-ის რეკურსიული (3.4) ფორმულა.

დამტკიცება. მართლაც, როცა $g(x) = x$, (3.18)-დან მივიღებთ

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j)}(t) \left( a\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\frac{j}{k}\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \right),$$

საიდანაც

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{1 - a\varphi_Y(t)} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \left( a + b\frac{j}{k} \right) \varphi_Y^{(j)}(t)\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t).$$

ცხადია, რომ $\psi$ გენერატორის ტერმინებში, $g(x) = x$ შემთხვევა შეესაბამება $\psi(t) = \varphi_N(t)$ ტოლობას.

**შენიშვნა.** რა თქმა უნდა, (3.17) არ არის $\psi$-ის $\varphi_N$ ფუნქციაზე დამოკიდებულების ერთადერთი ვარიანტი. შესაძლებელია სხვა ვარიანტებიც, მაგალითად:

$\psi(t) = g(t, \varphi_N(t))$,

სადაც $g(x, y)$ არის ორი ცვლადის რაიმე ფუნქცია; კერძოდ, აქ საინტერესოა განცალებადცვლადებიანი შემთხვევა, ანუ შემთხვევა, როცა $g(x, y) = h(x)g(y)$. ასეთ შემთხვევაში,

$\psi(t) = h(t)g(\varphi_N(t))$,

რაც ცხადია, წარმოადგენს (3.17) ვარიანტის განზოგადებას.

კიდევ ერთ საინტერესო ვარიანტია

$\psi(t) = g(t, \varphi_N(t), \varphi_N'(t), \varphi_N''(t), \ldots, \varphi_N^{(m-2)}(t))$,

სადაც $g(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ არის $m$ ცვლადის რაიმე ფუნქცია.

იმისთვის, რომ კარგად წარმოვიდგინოთ, თუ რა შეიძლება გაკეთდეს შედგენილი განაწილებების გამოსათვლელად საზოგადოდ, აქ ჩვენ შემოვიფარგლებით დამოკიდებულების მხოლოდ (3.17) ვარიანტით.

(3.17)-დან და (3.12)-დან მივიღებთ, რომ

$$\varphi_N(t) = \frac{1 - a - b\int_t^1 g(\varphi_N(s))ds}{1 - at}. \tag{3.19}$$

ცხადია, (3.19) წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას $\varphi_N$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამონახსნიც დამოკიდებული იქნება $g$ ფუნქციაზე. ამიტომ მას ჩვენ $\varphi_N(t;g)$-ით ავღნიშნავთ.

როგორც [10] ნაშრომშია ნაჩვენები, (3.19) განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებს ასეთ ტოლობას:

$$Z_g(\varphi_N(t;g);a,b) = \varphi_P(t;a.b), \tag{3.20}$$

სადაც

$$Z_g(t;a,b) = \exp\left(-\int_t^1 \frac{a+b}{au + bg(u)}du\right), \tag{3.21}$$

ხოლო

$$\varphi_P(t;a,b) = \left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{\frac{a+b}{a}}$$

წარმოადგენს განაწილებათა Panjer-ის კლასის მაწარმოებელ ფუნქციას.

რადგან $Z_g(t;a,b)$ არის $t$ არგუმენტის მიმართ უწყვეტი, ზრდადი ფუნქცია, მას $[0,1]$ სეგმენტზე გააჩნია ერთადერთი შექცეული $Z_g^{-1}$ ფუნქცია და (3.20)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi_N(t;g) = Z_g^{-1}(\varphi_P(t;a.b)), \tag{3.22}$$

ამიტომ (3.22)-დან მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{S_N}(t;g) \equiv \varphi_N(\varphi_Y(t);g) = Z_g^{-1}(\varphi_{S_N,P}(t;a,b)), \tag{3.23}$$

სადაც $\varphi_{S_N,P}(t;a.b)$ აღნიშნავს Panjer-ის შედგენილი განაწილების მაწარმოებელ ფუნქციას.

ცხადია, იმის მიხედვით, თუ როგორია $Z_g^{-1}$ და იმის გათვალისწინებით, რომ ვიცით $\varphi_{S_N,P}(t;a.b)$ ფუნქციის წარმოებულების გამოთვლა, (3.23) ტოლობიდან შესაძლებელია $\varphi_{S_N}(t;g)$ ფუნქციის წარმოებულების პოვნაც.

III. $g(x)=x^m$ **შემთხვევა** $m>1$.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $g$ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს $g(x)=x^m$, $\qquad m>1$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$\varphi_{N,m}(t)\equiv\varphi_N(t;g)$ და $Z_m(t;a,b)\equiv\exp\left(-\int_t^1\frac{a+b}{au+bu^m}du\right)$.

$t=\ln u$ ცვლადის გარდაქმნით $Z_m$-ის მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალზე და შედეგად მივიღებთ

$$Z_m(t;a,b)\equiv\left(\frac{a+b}{at^{1-m}+b}\right)^{\frac{a+b}{a(m-1)}}, \qquad (3.24)$$

საიდანაც ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$Z_m^{-1}(t;a,b)\equiv\left(\frac{a+b}{a}t^{-\frac{a(m-1)}{a+b}}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \qquad (3.25)$$

ამიტომ (3.25)-ში (3.22)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{N,m}(t)\equiv\left(\frac{a+b}{a}\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{m-1}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \qquad (3.26)$$

ხოლო შედგენილი განაწილებისთვის, (3.23)-დან გვექნება

$$\varphi_{S_N,m}(t)\equiv\left(\frac{a+b}{a}\left(\frac{1-a\varphi_Y(t)}{1-a}\right)^{m-1}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \qquad (3.27)$$

ან ექვივალენტური ფორმით

$$\varphi_{S_N,m}(t)=d^{\frac{1}{m-1}}\left(\left[\varphi_{S_N,p}(t)\right]^{-d(m-1)}-1+d\right)^{\frac{1}{1-m}}, \qquad (3.28)$$

სადაც $\varphi_{S_N,m}(t)$ არის შემოკლებული აღნიშვნა $\varphi_{S_N}(t;g)$-სათვის, ხოლო $\varphi_{S_N,P}(t)$ – შემოკლებული აღნიშვნა $\varphi_{S_N,P}(t;a,b)$-სი და

$$d \equiv \frac{a}{a+b}. \qquad (3.29)$$

უფრო მოხერხებულია (3.28) ფორმულა ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\varphi_{S_N,m}(t) = \varphi_{S_N,G}(t;a) \cdot d^{\frac{1}{m-1}} \cdot \left(1-(1-d)\cdot \varphi_{S_N,G}^{m-1}(t;a)\right)^{\frac{1}{1-m}}, \qquad (3.30)$$

სადაც

$$\varphi_{S_N,G}(t;a) = \varphi_{S_N,P}^{d}(t;a,b) = \frac{1-a}{1-a\varphi_Y(t)}, \qquad (3.31)$$

წარმოადგენს შედგენილი, $a$ პარამეტრიანი გეომეტრიული განაწილების მაწარმოებელ ფუნქციას.

(3.30)-დან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{S_N,2}(t) = \frac{d\varphi_{S_N,G}(t;a)}{1-(1-d)\varphi_{S_N,G}(t;a)}. \qquad (3.32)$$

თუ (3.32)-ში გავითვალისწინებთ (3.31)-ს, ადვილად დავასკვნით შემდეგი ფაქტის სამართლიანობას

შედეგი2. (3.28) ფორმულით განმარტებული $\varphi_{S_N,m}(t)$ ფუნქცია $m=2$-სათვის წარმოადგენს გეომეტრიული განაწილების მაწარმოებელ ფუნქციას, $\tilde{a}$ პარამეტრით, ანუ

$$\varphi_{S_N,2}(t) = \varphi_{S_N,G}(t;\tilde{a}) = \frac{1-\tilde{a}}{1-\tilde{a}\,\varphi_Y(t)}, \qquad (3.33)$$

სადაც

$$\tilde{a} = \frac{a+b}{1+b}. \qquad (3.34)$$

ახლა რაც შეეხება $\varphi_{S_N,m}(t)$-ს, როცა $m=3$. ამ შემთხვევაში (3.18) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{1}{(1-a\varphi_Y(t))}\sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j)}(t)\left(a\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) + b\frac{j}{k}[\varphi_{S_N}^3(t)]^{(k-j)}\right). \qquad (3.35)$$

რადგან $\varphi_{S_N}^3(t) = \varphi_{S_N}(t)\cdot\varphi_{S_N}^2(t)$ და $\varphi_{S_N}^2(t) = \varphi_{S_N}(t)\cdot\varphi_{S_N}(t)$ კვლავ ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით, შესაძლებელია $\varphi_{S_N}^3(t)$-ის მაღალი რიგის წარმოებულების ჩაწერაც. შედეგად, მივიღებთ

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t)=\frac{1}{\left(1-a\varphi_Y(t)\right)}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{k}C_k^j\varphi_Y^{(j)}(t)\left(a\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)+b\frac{j}{k}\sum_{m=0}^{k-j}C_{k-j}^m\varphi_{S_N}^{(k-j-m)}(t)\sum_{i=0}^{m}C_m^i\varphi_{S_N}^{(i)}(t)\varphi_{S_N}^{(m-i)}(t)\right). \qquad (3.36)$$

საინტერესოა ასევე იმ კერძო შემთხვევის გარჩევა, როცა $a=0$. მაშინ, როგორც $(3.21)$-დან ჩანს $Z$ ფუნქცია არ იქნება დამოკიდობული არც $b$ პარამეტრზე და მივიღებთ, რომ:

$$Z_{g,m}(t)=\exp\left(-\int_t^1 u^{-m}du\right)=\exp\left(\frac{1-t^{1-m}}{m-1}\right),$$

საიდანაც

$$Z_{g,m}^{-1}(t)=\left(1+(m-1)\ln t\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

როგორც გვახსოვს, ამ შემთხვევაში, $\varphi_P(t;0,b)=e^{b(t-1)}$, ე.ი. $\varphi_{S_N,P}(t;0,b)=e^{b(\varphi_Y(t)-1)}$ და მაშასადამე, $(3.27)$–დან დავასკვნით, რომ

$$\varphi_{S_N,m}(t)=\left(1+(m-1)b\left(1-\varphi_Y(t)\right)\right)^{\frac{1}{1-m}}. \qquad (3.37)$$

$(3.37)$-ის გაწარმოებით მივიღებთ ტოლობას

$$\varphi'_{S_N,m}(t)\left(1+(m-1)b\left(1-\varphi_Y(t)\right)\right)=b\varphi_{S_N,m}(t)\varphi'_Y(t),$$

რომლის $k-1$-ჯერ გაწარმოებითა და უდიდესი რიგის წარმოებულის მიმართ განტოლების ამოხსნით, მივიღებთ

$$\varphi_{S_N,m}^{(k)}(t)=\frac{b\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(m-1-(m-2)\frac{j}{k}\right)\varphi_Y^{(j)}(t)\varphi_{S_N,m}^{(k-j)}(t)}{1+b(m-1)\left(1-\varphi_Y(t)\right)}. \qquad (3.38)$$

რაც შეეხება შესაბამის შედგენილ ალბათობებს, $(3.38)$-დან მივიღებთ

$$f_{S_N,m}(k)=\frac{b\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(m-1-(m-2)\frac{j}{k}\right)f_Y(j)f_{S_N,m}(k-j)}{1+b(m-1)\left(1-f_Y(0)\right)}. \qquad (3.39)$$

სადაც $(3.37)$-დან ცხადია, რომ

$$f_{S_N,m}(0)=\left(1+(m-1)b\left(1-\varphi_Y(0)\right)\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

### IV. **Ramsay**-ის განაწილებათა შემთხვევა.

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, Ramsay-ის კლასი განიმარტება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობით:

$$p_n = p_{n-1} \cdot \left( a + \frac{b \cdot \left(1 - e^{-\delta}\right)}{e^{n\delta} - 1} \right). \qquad (3.40)$$

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $a = b$. ამ შემთხვევაში (3.40) ასეთ სახეს მიიღებს

$$p_n = p_{n-1} \cdot ae^{-\delta} \cdot \frac{e^{(n+1)\delta} - 1}{e^{n\delta} - 1}, \qquad (3.41)$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ ალბათობათა ცხად სახეებს:

$$p_k = p_0 \cdot a^k \cdot \frac{1 - e^{-(k+1)\delta}}{1 - e^{-\delta}}. \qquad (3.42)$$

ადვილი საჩვენებელია (იხ. [10]), რომ (3.41) განაწილების შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას ასეთი სახე აქვს

$$\varphi_N(t) = \frac{1-a}{1-a \cdot t} \cdot \frac{1-a_\delta}{1-a_\delta \cdot t} \equiv \varphi_{G,a}(t) \cdot \varphi_{G,a_\delta}(t), \qquad (3.43)$$

სადაც

$$a_\delta \equiv a \cdot e^{-\delta}. \qquad (3.44)$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $\varphi_N(t)$ მაწარმოებელი ფუნქცია წარმოადგენს ორი გეომეტრიული მაწარმოებელი ფუნქციის ნამრავლს, რაც იმას ნიშნავს, რომ Ramsay-ის $N$ შემთხვევითი სიდიდე წარმოდგება ორი დამოუკიდებელი გეომეტრიული შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით.

ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის უფრო მოხერხებულია არა (3.43), არამედ მისი ექვივალენტური შემდეგი წარმოდგენა:

$$\varphi_N(t) = c_\delta \cdot \varphi_{G,a}(t) + (1 - c_\delta) \cdot \varphi_{G,a_\delta}(t), \qquad (3.45)$$

სადაც

$$c_\delta = \frac{e^\delta - a}{e^\delta - 1} = \frac{1 - a_\delta}{1 - e^{-\delta}}. \qquad (3.46)$$

ცხადია, მაშინ, რომ

$$\varphi_{S_N}(t) = c_\delta \cdot \varphi_{G,a}(\varphi_Y(t)) + (1 - c_\delta) \cdot \varphi_{G,a_\delta}(\varphi_Y(t)) \qquad (3.47)$$

და მაშასადამე, ძველ აღნიშვნებში (იხ.3.31),

$$\varphi^{(k)}_{S_N}(t)=c_\delta\cdot\left(\varphi_{G,a}(\varphi_Y(t))\right)^{(k)}+(1-c_\delta)\cdot\left(\varphi_{G,a_\delta}(\varphi_Y(t))\right)^{(k)}=$$

$$=c_\delta\cdot\varphi^{(k)}_{S_N,G}(t;a)+(1-c_\delta)\cdot\varphi^{(k)}_{S_N,G}(t;a_\delta) \qquad (3.48)$$

მაგრამ გეომეტრიული განაწილებისათვის როგორც გვახსოვს (იხ. თეორემა 3.2), სამართლიანია შემდეგი რეკურსიული ფორმულა:

$$\varphi^{(k)}_{S_N,G}(t;a)=\frac{a}{1-a\varphi_Y(t)}\cdot\sum_{j=1}^{k}C_k^j\cdot\varphi_Y^{(j)}(t)\cdot\varphi^{(k-j)}_{S_N,G}(t;a)\,, \qquad (3.49)$$

საიდანაც

$$f_{S_N,a}(k)\equiv\frac{\varphi^{(k)}_{S_N,G}(0;a)}{k!}=\frac{a}{1-a\cdot f_Y(0)}\cdot\sum_{j=1}^{k}f_Y(j)\cdot f_{S_N,a}(k-j)\,, \qquad (3.50)$$

ანალოგიურად,

$$f_{S_N,a_\delta}(k)\equiv\frac{\varphi^{(k)}_{S_N,G}(0;a_\delta)}{k!}=\frac{a_\delta}{1-a_\delta\cdot f_Y(0)}\cdot\sum_{j=1}^{k}f_Y(j)\cdot f_{S_N,a_\delta}(k-j)\,, \qquad (3.51)$$

ცხადია, აქვე,

$$f_{S_N,a}(0)=\varphi_{S_N,G}(0;a)=\frac{1-a}{1-a\cdot f_Y(0)} \text{ და } f_{S_N,a_\delta}(0)=\varphi_{S_N,G}(0;a_\delta)=\frac{1-a_\delta}{1-a_\delta\cdot f_Y(0)} \qquad (3.52)$$

ამიტომ საბოლოოდ, შედგენილი ალბათობებისათვის გვექნება:

$$f_{S_N}(0)=c_\delta\cdot f_{S_N,a}(0)+(1-c_\delta)\cdot f_{S_N,a_\delta}(0)=f_{S_N,a}(0)\cdot f_{S_N,a_\delta}(0)=\frac{1-a}{1-a\cdot f_Y(0)}\cdot\frac{1-a_\delta}{1-a_\delta\cdot f_Y(0)}$$

$$\frac{\varphi^{(k)}_{S_N}(0)}{k!}\equiv f_{S_N}(k)=c_\delta\cdot f_{S_N,a}(k)+(1-c_\delta)\cdot f_{S_N,a_\delta}(k)f_{S_N,a_\delta}(k) \qquad (3.53)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ $a=b$ კერძო შემთხვევაში გამოვთვალოთ Ramsay-ის კლასის შედგენილი ალბათობები, საჭიროა (3.50) – (3.52) რეკურენტული ფორმულებით გამოვთვალოთ შედგენილი გეომეტრიული ალბათობები და ისინი ‘‘შევწონოთ’’ (3.53)-ის მიხედვით.

საინტერესოა ხომ არ შეიძლება ისეთი $Y$-ების აღება, რომელთათვისაც შესაძლებელი იქნებოდა (3.50) – (3.52) რეკურენტული პროცედურისათვის თავის არიდება და $f_{S_N,a}(k)$ და $f_{S_N,a_\delta}(k)$ ალბათობათა პირდაპირი ფორმულების მიღება?

პასუხს ამ შეკითხვაზე იძლევა შემდეგი

**თეორემა 3.3.** თუ $Y$-ებს აქვთ გეომეტრიული განაწილება პარამეტრით $\theta$, $0 < \theta < 1$, ანუ

$$f_Y(j) = \theta^j \cdot (1-\theta), \quad j = 0,1,2,\ldots, \tag{3.54}$$

მაშინ

$$f_{S_N,a}(0) = (1-a)p(a) \text{ და } f_{S_N,a_\delta}(0) = (1-a_\delta)\cdot p(a_\delta) \tag{3.55}$$

და ყოველი $k \geq 1$-სათვის,

$$f_{S_N,a}(k) = \theta^k \cdot (1-\theta)\cdot a \cdot (1-a)\cdot p^{k+1}(a) \text{ და}$$

$$f_{S_N,a_\delta}(k) = \theta^k \cdot (1-\theta)\cdot a_\delta \cdot (1-a_\delta)\cdot p^{k+1}(a_\delta) \tag{3.56}$$

სადაც

$$p(a) \equiv \frac{1}{1-a\cdot(1-\theta)} \text{ და შესაბამისად, } p(a_\delta) \equiv \frac{1}{1-a_\delta\cdot(1-\theta)}.$$

**დამტკიცება.** ცხადია, რომ დამტკიცება ერთნაირია ორივე შემთხვევისათვის და ამიტომ ჩვენ მხოლოდ $(3.55)$-ისა და $(3.56)$-ის პირველი ნაწილების დამტკიცებას მოვიყვანთ.

$(3.52)$-დან ცხადია, რომ

$$f_{S_N,a}(0) = \varphi_{S_N,G}(0;a) = \frac{1-a}{1-a\cdot(1-\theta)} = (1-a)\cdot p(a).$$

გავიხსენოთ ახლა $(3.50)$ და ჩავსვათ შიგ $(3.54)$

$$f_{S_N,a}(k) = \frac{a\cdot(1-\theta)}{1-a\cdot(1-\theta)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\theta^j\cdot f_{S_N,a}(k-j) = a\cdot p(a)\cdot(1-\theta)\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\theta^{k-j}\cdot f_{S_N,a}(j) \tag{3.57}$$

გადავწეროთ $(3.57)$ შემდეგი სახით:

$$h_k = a\cdot p(a)\cdot(1-\theta)\cdot\sum_{j=0}^{k-1}h_j\,. \tag{3.58}$$

სადაც

$$h_k \equiv \theta^{-k}\cdot f_{S_N,a}(k). \tag{3.59}$$

ცხადია, რომ ყოველი $k \geq 1$-სათვის, $(3.58)$-დან მივიღებთ, რომ

$$h_{k+1} - h_k = a\cdot p(a)\cdot(1-\theta)\cdot h_k\,,$$

საიდანაც

$h_{k+1} = p(a) \cdot h_k$

და მაშასადამე, $(3.59)$-დან

$f_{S_N,a}(k+1) = \theta \cdot p(a) \cdot f_{S_N,a}(k)$,

საიდანაც თავის მხრივ, მივიღებთ, რომ

$$f_{S_N,a}(k) = (\theta \cdot p(a))^{k-1} \cdot f_{S_N,a}(1). \qquad (3.60)$$

$(3.57)$-დან გვაქვს, რომ
$f_{S_N,a}(1) = \theta \cdot (1-\theta) \cdot a \cdot (1-a) \cdot p^2(a)$.

უკანასკნელი ტოლობა $(3.60)$-თან ერთად იძლევა $(3.55)$-ს. **თეორემა დამტკიცებულია.**

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის მიხედვით, გეომეტრიულ შემთხვევით სიდიდეთა გეომეტრიული რაოდენობის ჯამს აქვს ე.წ. "დაგვიანებული" გეომეტრიული განაწილება (რომელიც ცოტათი განსხვავებულ კონტექსტში გვხვდება [10] ნაშრომშიც). ამ თეორემის მიხედვით, $(3.53)$ ასე გამოიყურება:

$$f_{S_N}(0) = c_\delta \cdot f_{S_N,a}(0) + (1-c_\delta) \cdot f_{S_N,a_\delta}(0) = f_{S_N,a}(0) \cdot f_{S_N,a_\delta}(0) =$$
$$= (1-a) \cdot (1-a_\delta) \cdot p(a) \cdot p(a_\delta) \qquad (3.61)$$

და ყოველი $k \geq 1$-სათვის,

$$f_{S_N}(k) = \theta^k \cdot (1-\theta) \cdot c_\delta \cdot a \cdot (1-a) \cdot \left(p^{k+1}(a) - e^{-2\delta} \cdot p^{k+1}(a_\delta)\right). \qquad (3.62)$$

საინტერესოა, რომ სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 3.4**. $(3.65)$-ით განსაზღვრული $f_{S_N}(k)$ ალბათობებისათვის $k \geq 2$-ის დროს სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობანი:

$$f_{S_N}(k) = \theta \cdot (p(a) + p(a_\delta)) \cdot f_{S_N}(k-1) - \theta^2 \cdot p(a) \cdot p(a_\delta) \cdot f_{S_N}(k-2), \qquad (3.63)$$

სადაც

$$f_{S_N}(0) = (1-a) \cdot (1-a_\delta) \cdot p(a) \cdot p(a_\delta), \quad f_{S_N}(1) = f_{S_N}(0) \cdot \theta \cdot (p(a) + p(a_\delta) - 2) \quad (3.64)$$

და როგორც თეორემა 3.3-ში,

$$p(a) \equiv \frac{1}{1 - a \cdot (1-\theta)}, \quad p(a_\delta) \equiv \frac{1}{1 - a_\delta \cdot (1-\theta)}.$$

**დამტკიცება**. გამომდინარეობს $(3.62)$-ის ჩასმით $(3.63)$-ში.

ეს თეორემა იმით არის საინტერესო, რომ $(3.63)$ რეკურენტული თანაფარდობა წარმოადგენს ორ ნაბიჯიან რეკურსიას მუდმივი ($k$-საგან დამოუკიდებელი)

კოეფიციენტებით, რაც დამახასიათებელია Sundt-ის (Stroter-ის) კლასის განაწილებათათვის; თუმცა, უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ ამ კლასებში რეკურსია იწყება $k \geq 1$-დან და მიჩნეულია, რომ $f_{S_N}(-1) \equiv 0$. ამგვარად, ამ თეორემაში აღწერილი შედგენილი განაწილება მიეკუთვნება განაწილებათა კლასს, რომელსაც პირობითად შეიძლება ვუწოდოთ “დაგვიანებული” Stroter-ის კლასი.

აქვე მოვიყვანოთ $f_{S_N}(k)$ ალბათობების გამოსათვლელი რეკურსიული ფორმულა, რომელიც (3.43)-დან შეიძლება მივიღოთ სხვანაირად. ამისათვის (3.43)-ს შევხედოთ ასეთნაირად:

$$\varphi_N(t) \cdot \beta_\delta(t) = \beta_\delta(1) \qquad (3.43^*)$$

სადაც

$$\beta_\delta(t) = (1 - at) \cdot (1 - a_\delta t) \, . \qquad (3.65)$$

(3.43*)-ის შესაბამის ტოლობას შედგენილი განაწილებისათვის ცხადია, ექნება შემდეგი სახე

$$\beta_\delta(\varphi_Y(t)) \cdot \varphi_{S_N}(t) = \beta_\delta(1) \, ,$$

რომლის $k$-ჯერ გაწარმოებითა და $\varphi_{S_N}$-ის $k$-ური რიგის წარმოებულის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$\varphi_{S_N}^{(k)}(t) = -\frac{1}{\beta_\delta(\varphi_Y(t))} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot \left(\beta_\delta(\varphi_Y(t))\right)^{(j)} \cdot \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \, . \qquad (3.66)$$

ახლა რაც შეეხება $\beta_\delta(\varphi_Y(t))$ ფუნქციის წარმოებულებს, რადგან

$$\beta_\delta(\varphi_Y(t)) = 1 - (a + a_\delta) \cdot \varphi_Y(t) + a \cdot a_\delta \cdot \varphi_Y^2(t) \, ,$$

კვლავ ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\left(\beta_\delta(\varphi_Y(t))\right)^{(j)} = -(a + a_\delta) \cdot \varphi_Y^{(j)}(t) + a \cdot a_\delta \cdot \left(\varphi_Y^2(t)\right)^{(j)} =$$

$$= -(a + a_\delta) \cdot \varphi_Y^{(j)}(t) + a \cdot a_\delta \cdot \sum_{i=0}^{j} C_j^i \cdot \varphi_Y^{(i)}(t) \cdot \varphi_Y^{(j-i)}(t) \, . \qquad (3.67)$$

(3.66)-ში (3.67)-ის გათვალისწინებით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$3.71 \; \varphi_{S_N}^{(k)}(t) = \frac{a + a_\delta}{\beta_\delta(\varphi_Y(t))} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \cdot \varphi_Y^{(j)}(t) - \frac{a \cdot a_\delta}{\beta_\delta(\varphi_Y(t))} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \cdot \left(\varphi_Y^2(t)\right)^{(j)} =$$

$$= \frac{a + a_\delta}{\beta_\delta(\varphi_Y(t))} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \cdot \varphi_Y^{(j)}(t) -$$

$$- \frac{a \cdot a_\delta}{\beta_\delta(\varphi_Y(t))} \cdot \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot \varphi_{S_N}^{(k-j)}(t) \cdot \sum_{i=0}^{j} C_j^i \cdot \varphi_Y^{(i)}(t) \cdot \varphi_Y^{(j-i)}(t) \qquad (3.68)$$

ცხადია, (3.68)-დან შედგენილი ალბათობებისათვის მივიღებთ, რომ

$$f_{S_N}(k) = \frac{1}{(1 - a \cdot f_Y(0)) \cdot (1 - a_\delta \cdot f_Y(0))} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{k} f_{S_N}(k-j) \cdot \left( (a + a_\delta) \cdot f_Y(j) - a \cdot a_\delta \cdot \sum_{i=0}^{j} f_Y(i) \cdot f_Y(j-i) \right) \qquad (3.69)$$

სადაც ცხადია, (3.53)-ის მსგავსად,

$$f_{S_N}(0) = \frac{(1-a) \cdot (1 - a_\delta)}{(1 - a \cdot f_Y(0)) \cdot (1 - a_\delta \cdot f_Y(0))}.$$

შევნიშნოთ, რომ შედგენილ ალბათობათა გამოთვლის (3.69) გზა განსხვავდება იმავე ალბათობათა (3.50)–(3.53) ფორმულებით მოცემული გზისაგან და ის ზუსტად წარმოადგენს Sundt-ის მიერ შემოთავაზებული რეკურენტული ფორმულის (იხ. [6], თეორემა 9) ამ შემთხვევისათვის ჩაწერილ ვარიანტს: როგორც 3.45-დან გვახსოვს, Ramsay-ის კლასის ალბათობები აკმაყოფილებდნენ $p_n = a_1 \cdot p_{n-1} + a_2 \cdot p_{n-2}$ რეკურენტულ თანადობას, სადაც $a_1 = a + a_\delta$ და $a_2 = - a \cdot a_\delta$. თუ ამასთან ერთად (3.69)-ში გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{i=0}^{j} f_Y(i) \cdot f_Y(j-i) = f_Y^{2*}(j) = P\{Y_1 + Y_2 = j\},$$

მაშინ ის შეგვიძლია ასე გადავწეროთ (შეადარე [6]-ის (20) ფორმულას):

$$f_{S_N}(k) = \frac{1}{1 - a_1 \cdot f_Y(0) - a_2 \cdot f_Y^2(0)} \cdot \sum_{j=1}^{k} f_{S_N}(k-j) \cdot \left( a_1 \cdot f_Y^{1*}(j) + a_2 \cdot f_Y^{2*}(j) \right). \qquad (3.70)$$

V. პუასონის შერეული განაწილებათა შემთხვევა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $N$-ს გააჩნია შერეული პუასონის განაწილება. განაწილებათა ეს კლასი ასე მოიცემა:

$$p_n = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} dH(\lambda) \tag{3.71}$$

სადაც $H(\lambda)$ შემრევი (ან სტრუქტურული) ფუნქცია არის რაიმე განაწილების ფუნქცია $h(\lambda)$ სიმკვრივით. ამ შემთხვევაში, $N$-ის მაწარმოებელი ფუნქცია [10] იქნება:

$$\varphi_N(t) = \int_0^\infty e^{\lambda(t-1)} dH(\lambda)\,. \tag{3.72}$$

შესაბამისი შედგენილი განნაწილების მაწარმოებელი ფუნქციაა

$$\varphi_{S_N}(t) = \int_0^\infty e^{\lambda(\varphi_Y(t)-1)} dH(\lambda) \tag{3.73}$$

საინტერესოა, განაწილებათა რომელ ცნობილ კლასებს იძლევას ხვადასხვა სტრუქტურული $H$ ფუნქციის დროს $(3.72)$-ით მოცემული მაწარმოებელი ფუნქცია და შესაძლებელია თუ არა შესაბამისი შედგენილი განაწილებებისათვის $(3.51)$-დან რეკურენტული ფორმულების მიღება. პასუხს პირველ შეკითხვაზე იძლევა [10] ნაშრომი, სადაც განხილულია სტრუქტურული $H$ ფუნქციის ორი მაგალითი:

I. როცა

$$H(\lambda) = 2\Phi(\lambda) - 1 \tag{3.74}$$

სადც $\Phi(\lambda)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია ($\varphi(\lambda)$ სამკვრივით).

ამ შემთხვევაში მაწარმოებელ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს

$${}_0\varphi_N(t) = c_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(1-t)} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \equiv \frac{\mathrm{M}(1-t)}{\mathrm{M}(0)}\quad , \tag{3.75}$$

სადაც $\mathrm{M}(x) = \dfrac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}$ წარმოადგენს ე.წ. მილსის შეფარდებას.

[10] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ $(3.75)$-ის შესაბამისი ალბათობები აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობას:

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot p_{n-2} - \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} \tag{3.76}$$

და მაშასადამე, (3.74)-ით მოცემული სტრუქტურული ფუნქციის შემთხვევაში შერეული პუასონის განაწილება იძლევა Sundt-ის კლასის (კერძოდ, Stroter-ის კლასის) ალბათობებს.

II. როცა $H_k(\lambda)$ განაწილების შესაბამის $h_r(\lambda)$ სიმკვრივეს აქვს ასეთი სახე:

$$h_r(\lambda) = c_r \lambda^r e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \qquad (3.77)$$

სადაც

$$\int_0^{+\infty} h_r(\lambda)d\lambda = c_r \int_0^{+\infty} \lambda^r e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad c_r = \frac{1}{2^{(r-1)/2}\Gamma((r+1)/2)}. \qquad (3.78)$$

შევნიშნოთ, რომ I შემთხვევა არის II-ის კერძო შემთხვევა, როცა $r = 0$.

ამ შემთხვევაში, მაწარმოებელ ფუნქციას აქვს ასეთი სახე:

$$\varphi_N(t) = c_r \int_0^{\infty} e^{\lambda(t-1)} \lambda^r e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \equiv {}_r\varphi_N(t) \qquad (3.79)$$

და შესაბამისი ${}_r p_n$ ალბათობები აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობას

$${}_r p_n = \frac{n+k-1}{n\cdot(n-1)} \cdot {}_r p_{n-2} - \frac{1}{n} \cdot {}_r p_{n-1} \qquad (3.80)$$

რაც ე.წ. Wang-Sobrero-ს კლასის (იხ. [10]) ალბათობათა კერძო შემთხვევაა (როცა $k = 2$).

გადავიდეთ ახლა შედგენილი განაწილებათათვის რეკურენტული ფორმულების მიღების საკითხზე.

ცხადია, რომ I შემთხვევაში შედგენილი განაწილების მაწარმოებელი ფუნქცია იქნება

$${}_0\varphi_{S_N}(t) = \frac{\mathrm{M}(1-\varphi_Y(t))}{\mathrm{M}(0)} \quad , \qquad (3.81)$$

რომლის გაწარმოების შედეგად გვექნება

$${}_0\varphi'_{S_N}(t) = -\varphi'_Y(t)\frac{\mathrm{M}'(1-\varphi_Y(t))}{\mathrm{M}(0)} \quad ,$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathrm{M}'(x) = x\mathrm{M}(x) - 1$, საბოლოოდ მივიღებთ

$${}_0\varphi'_{S_N}(t) = \frac{\varphi'_Y(t)}{\mathrm{M}(0)} - (1-\varphi_Y(t))\varphi'_Y(t)\,{}_0\varphi_{S_N}(t),$$

უკანასკნელი ტოლობის $k-1$-ჯერ გაწარმოებით კი მივიღებთ, რომ

$$
{}_0\varphi_{S_N}^{(k)}(t)=\frac{\varphi_Y^{(k)}(t)}{\mathrm{M}(0)}-\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^{j}\cdot{}_0\,\varphi_{S_N}^{(k-1-j)}(t)\sum_{i=0}^{j}C_j^i\cdot\left(1-\varphi_Y(t)\right)^{(j-i)}\cdot\varphi_Y^{(i)}(t)=
$$

$$
=\frac{\varphi_Y^{(k)}(t)}{\mathrm{M}(0)}-\left(1-\varphi_Y(t)\right)\sum_{j=1}^{k}C_{k-1}^{j-1}\cdot{}_0\,\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)\varphi_Y^{(j)}(t)+
$$

$$
+\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^{j}\cdot{}_0\,\varphi_{S_N}^{(k-1-j)}(t)\sum_{i=1}^{j}C_j^{i-1}\cdot\left(1-\varphi_Y(t)\right)^{(j+1-i)}\cdot\varphi_Y^{(i)}(t) \qquad (3.82)
$$

საიდანაც $k!$ გაყოფითა და $t=0$-სათვის მივიღებთ, რომ

$$
{}_0\,f_{S_N}(k)=\frac{f_{S_N}(k)}{\mathrm{M}(0)}-\left(1-f_Y(0)\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}{}_0\,f_{S_N}(k-j)f_Y(j)+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{k}{}_0\,f_{S_N}(k-1-j)\cdot f_Y(j)\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{k}f_Y(j+1-i)f_Y(i) \qquad (3.83)
$$

სადაც

$$
{}_0\,f_{S_N}(0)=\frac{\mathrm{M}(1-f_Y(0))}{\mathrm{M}(0)} \qquad (3.84)
$$

II შემთხვევისთვის, შედგენილი განაწილების მაწარმოებელ ფუნქციას ცხადია, შემდეგი სახე აქვს:

$$
\varphi_{S_N}(t)=c_r\int_0^{\infty}e^{\lambda(\varphi_Y(t)-1)}\lambda^r e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda\equiv{}_r\,\varphi_{S_N}(t) \qquad (3.85)
$$

ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შედეგი თეორემა, რომელიც საშუალებას იძლევა ${}_r\,\varphi_{S_N}(t)$-ს მაღალი რიგის წარმოებულები გამოთვლილ იქნას მისივე წინა რიგის წარმოებულებითა და ${}_{r-1}\varphi_{S_N}(t)$ ფუნქციის წარმოებულებულების საშუალებით, ანუ რეკურსია მიდის, როგორც წარმოებულების, ასევე განაწილების $r$ პარამეტრის მიმართ.

თეორემა 3.4: სამართლიანია ტოლობა

$$
{}_{r+1}\varphi_{S_N}^{(k)}(t)=\frac{1}{\varphi_Y'(t)}\left(\frac{c_{r+1}}{c_r}{}_r\,\varphi_{S_N}^{(k+1)}(t)-\sum_{j=1}^{k}C_k^j\varphi_Y^{(j+1)}(t){}_{r+1}\,\varphi_{S_N}^{(k-j)}(t)\right)\ , \qquad (3.86)
$$

**დამტკიცება.** (3.84)-ის გაწარმოებით გვექნება

$$
{}_r\,\varphi_{S_N}(t)=c_r\varphi_Y'(t)\int_0^{\infty}e^{\lambda(\varphi_Y(t)-1)}\lambda^{r+1}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda\quad ,
$$

საიდანაც

$$ {}_r\varphi'_{S_N}(t) = c_r\,\varphi'_Y(t)\frac{{}_{r+1}\varphi_{S_N}(t)}{c_{r+1}} \quad ,$$

გადავწეროთ ეს ტოლობა შემდეგნაირად

$$ {}_{r+1}\varphi_{S_N}(t)\varphi'_Y(t) = \frac{c_r}{c_{r+1}}\,{}_r\varphi'_{S_N}(t) \quad ,$$

$k$-ჯერ გაწარმოებით და ${}_{r+1}\varphi_{S_N}(t)$-ს უმაღლესი რიგის მიმართ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$ {}_{r+1}\varphi^{(k)}_{S_N}(t) = \frac{1}{\varphi'_Y(t)}\left(\frac{c_{r+1}}{c_r}\,{}_r\varphi^{(k+1)}_{S_N}(t) - \sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)\,{}_{r+1}\varphi^{(k-j)}_{S_N}(t)\right),$$

ანუ მივიღეთ დასამტკიცებელი.

თეორემის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ, შემთხვევა როცა $r=1$, მაშინ $(3.80)$ შემდეგ სახეს მიიღებს

$$ {}_1\varphi^{(k)}_{S_N}(t) = \frac{1}{\varphi'_Y(t)}\left(\frac{c_1}{c_0}\,{}_0\varphi^{(k+1)}_{S_N}(t) - \sum_{j=1}^{k} C_k^j \varphi_Y^{(j+1)}(t)\,{}_1\varphi^{(k-j)}_{S_N}(t)\right), \tag{3.87}$$

ხოლო აქ თუ ჩავსვავთ $(3.82)$-ს ჩაწერილს $k+1$-სათვის და გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{c_1}{c_0} = \mathrm{M}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ მივიღებთ

$$ {}_1\varphi^{(k)}_{S_N}(t) = \frac{1}{\varphi'_Y(t)}\left(\varphi_Y^{(k+1)}(t) - \mathrm{M}(0)\sum_{j=0}^{k} C_k^j\,{}_0\varphi^{(k-j)}_{S_N}(t)\sum_{i=0}^{j} C_j^i \left(1-\varphi_Y(t)\right)^{(j-i)} \varphi_Y^{(i+1)}(t)\right) -$$

$$ - \frac{1}{\varphi'_Y(t)}\sum_{j=0}^{k-1} {}_1\varphi^{(j)}_{S_N}(t)\varphi_Y^{(k+1-j)}(t) \tag{3.88}$$

როგორც ვხედავთ, რეკურენტულ განაწილებათა განზოგადებული კლასისათვის $(3.14)$-ით მოცემული შედგენილ განაწილებათა გამოსათვლელი რეკურსიული ფორმულა მართლაც ანზოგადებს დანარჩენ შემთხვევებში მიღებულ რეკურსიულ ფორმულებს და ის წარმატებით შეიძლება გამოყენებულ იქნას ასევე სხვა შემთხვევებშიც.

## ლიტერატურა

[1] Hesselager, O (1994) A recursive procedure for calculation of some compound distributions ASTIN Bulletin 24, No 1, 1994
[2] Panjer, H.H (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions ASTIN Bulletin 12, 22-26
[3] Panjer, H.H and Willmot, G.E (1982) Recursions for compound distributions ASTIN Bulletin 13, 1-11
[4] Ramsay, C.M (1989) On an integral equation for discounted compound Annuity distributions ASTIN Bulletin 19, No 2
[5] Schroter, K.J (1990) On a family of counting distributions and recursions for related compound distributions Scand Actuarial J 1990, 161-174
[6] Sundt, B (1992) On some extensions of Panjer's class of counting distributions ASTIN Bulletin 22, 61-80
[7] Sundt, B and Jewell, W.S (1981) Further results on recursive evaluation of compound distribuions ASTIN Bulletin 12, 27-39
[8] Wang, S and Sobrero, M (1994) Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions ASTIN Bulletin 24, No 2, 1994
[9] Willmot, G (1988) Sundt and Jewell's family of counting discrete distributions ASTIN Bulletin 18, 17-29
[10] სტუ-ს სტუდენტი გიორგი მახარაძის სადიპლომო ნაშრომი