ნეტო-პრემიების დადგენა სიცოცხლის დაზღვევის მარტივ მოდელებში.

ზურაბ ციგროშვილი

1. შესავალი

მათემატიკას, კერძოდ კი, ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკას, სადაზღვევო საქმიანობასთან ურთიერთობის ხანგრძლივი ისტორია აქვს. შეიძლება ითქვას, რომ (აზარტული თამაშების გარდა) სადაზღვევო საქმის განვითარებასთანაა დაკავშირებული ჯერ ალბათობის თეორიის და შემდეგ მათემატიკური სტატისტიკის განვითარება. საწყის ეტაპზე (დაახლოებით ამერიკის კონტინენტზე ევროპელთა ფართო "ინტერვენციის" შემდეგ) საჭირო იყო გემებით გარკვეული ტვირთების გადაზიდვა. რამდენადაც ნაოსნობა იმ დროისათვის კარგად განვითარებული არ იყო, ზღვაზე ხშირი იყო კატასტროფები და შესაბამისად, დიდი იყო კატასტროფებით გამოწვეული ზარალიც. ამიტომ ტვირთის მეპატრონეს ერჩია წინასწარ გაეღო გარკვეული თანხა იმისათვის, რომ ნაწილობრივ მაინც აენაზღაურებინა საზღვაო კატასტროფით გამოწვეული ზარალი. ბუნებრივია, მშვიდობიანი რეისის შემთხვევაში მას არ უბრუნდებოდა დამატებით გადახდილი ეს თანხა (ასეთ შემთხვევაში ამ თანხის საკომპენსაციოდ ისიც კმაროდა, რომ ტვირთმა მშვიდობიანად ჩააღწია დანიშნულ ადგილამდე). მაგრამ ბუნებრივია, ისმებოდა კითხვა: რა სიდიდის თანხა უნდა გადაეხადა ტვირთის მეპატრონეს, ანუ როგორ მიმართებაში უნდა ყოფილიყო თანხის ეს სიდიდე ტვირთის საერთო ღირებულებასა და იმ რისკთან, რომელიც დაკავშირებული იყო საზღვაო კატასტროფებთან? ცხადია, რომ თავდაპირველად ეს კეთდებოდა ტვირთისა და გემის მეპატრონეების "სტიქიური" გარიგების საფუძველზე.

მხოლოდ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების განვითარების შემდეგ გახდა შესაძლებელი ასეთ კითხვებზე აზრიანი (შესაძლებლობის ფარგლებში ამომწურავი) პასუხების გაცემა. ამ ნაშრომის მიზანია სწორედ, წარმოაჩინოს ალბათობის თეორიის როლი

საერთოდ, სადაზღვევო საქმიანობაში და კერძოდ კი, სიცოცხლის დაზღვევის მარტივი მოდელებისათვის ნეტო-პრემიების დადგენაში. რაც შეეხება მათემატიკურ სტატისტიკას, ის ფართოდ გამოიყენება დემოგრაფიაში, სიცოცხლის ხანგრძლივობის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის შესაფასებლად, რომელიც ასე საჭიროა ზემოხსენებული ნეტო-პრემიების დადგენისას (თუმცა, ეს უკანასკნელი, ამ ნაშრომის მიზნებს სცილდება და მას ჩვენ აქ არ შევეხებით).

2. სიცოცხლის ხანგრძლივობა, როგორც შემთხვევითი სიდიდე და მისი მახასიათებლები.

ამ ნაწილში ჩვენ შემოვიტანთ იმ ობიექტებსა და ცნებებს, რომელიც დაგვჭირდება ჩვენი ამოცანის გადასაწყვეტად. კვლევის ერთ-ერთ ძირითად ობიექტს წარმოადგენს ადამიანის (ჩვენს შემთხვევაში, დასაზღვევის) სი-ცოცხლის ხანგრძლივობა ანუ მისი ასაკი გარდაცვალების მომენტში. ცხადია, ალბათ, რომ ერთადერთი ღმერთისათვისაა წინასწარ ცნობილი ჩვეულებრივი მოკვდავი ადამიანის ამ ასაკის მნიშვნელობა. ამიტომ ჩვენ მხოლოდ ის დაგვრჩენია, რომ ასაკი გარდაცვალების მომენტში განვიხილოთ როგორც არაუარყოფით მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდე და ალბათობის თეორიის გამოყენებით შევეცადოთ მის დახასიათებას. ჩვეულებრივ, ადამიანის ასაკი "იზომება" წლებში, თვეებში, დღეებში და ა.შ. ამიტომ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ სიცოცხლის ხანგრძლივობას (აღვნიშნოთ ის T-ით) შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა დროის უწყვეტ სკალაზე, ანუ ალბათობის თეორიის ტერმინოლოგიით, T წარმოადგენს უწყვეტ, არაუარყოფით მნიშვნელობებიან შემთხვევით სიდიდეს. უფრო მეტიც, ჩვენ დავუშვებთ, რომ ის არის აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე განაწილების ფუნქციით $F(x) = P\{T \le x\}$ და სიმკვრივით $f(x) = F'(x)$.

შემოვიღოთ ასაკის მიღწევადობის (*Survival function*) $S(x)$ ფუნქციის ცნება, რომელიც განიმარტება როგორც $\{T > x\}$ ხდომილობის ალბათობა:

$$S(x) \equiv P\{T > x\} = 1 - F(x). \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ F–საგან განსხვავებით, $S'(x) = -f(x)$ და ე.ი. S არის კლებადი ფუნქცია.

შემოვიღოთ აგრეთვე ე. წ. სიკვდილიანობის ძალის ან წამიერი სიკვდილის რიკის (*Mortality, Filure rate*) ან უბრალოდ, რისკის ფუნქციის ცნებაც, რომელიც (1)-ის საშუალებით შემდეგნაირად მოიცემა:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}. \qquad (2)$$

$\mu(x)$ ფუნქციას დიდი მნიშვნელობა აქვს არა მხოლოდ დაზღვევის ამოცანებში, არამედ მას ფართო გამოიყენება აქვს რისკისა და საიმედოობის თეორიებში, ასევე დემოგრაფიასა და კლინიკურ გამოკვლევებში და ა. შ. იმისათვის რომ კარგად გავიგოთ ამ ფუნქციის შინაარსი, პირველ რიგში, გავიხსენოთ ფუნქციის წარმოებულის განმარტება მათემატიკური ანალიზის კურსიდან და (2) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{S(x)-S(x+h)}{h\cdot S(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{P\{x<T\le x+h\}}{h\cdot P\{T>x\}} = \lim_{h\to 0}\frac{P\{x<T\le x+h \mid T>x\}}{h}.$$

როგორც ვხედავთ, $\mu(x)dx \approx P\{x < T \le x+dx\}$, ანუ $\mu(x)dx$ წარმოადგენს x ასაკს მიღწეული ადამიანის გარდაცვალების ალბათობას x-ის მცირე $[x\,;\,x+dx]$ დროით ინტერვალში, ანუ წამიერად x ასაკში და მაშასადამე, μ ამართლებს თავის სახელს. გარდა ამისა, როგორც უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარიდან ჩანს, μ ფუნქციას (f-ის მსგავსად) რაღაც პირობითი განაწილების წარმოებულის ტიპის კონსტრუქცია აქვს. უფრო კონკრეტულად, შემოვიღოთ განაწილების ფუნქცია გარკვეულ a ასაკს გადაცილებული პიროვნებისათვის, ანუ გამოვთვალოთ პირობითი ალბათობა იმისა, რომ პიროვნება გარდაიცვლება x ($\ge a$) ასაკში, იმ პირობით, რომ მან უკვე იცოცხლა a ასაკამდე:

$$F(x\mid a) \equiv P\{T \le x \mid T>a\} = \frac{P\{a<T\le x\}}{P\{T>x\}}\cdot I\{x\ge a\} = \frac{S(a)-S(x)}{S(a)}\cdot I\{x\ge a\}. \qquad (3)$$

როგორც (3) განმარტებიდან ჩანს, $F(x)$ განაწილებისაგან განსხვავებით, $F(x|a)$ წარმოადგენს $[a;+\infty)$ ინტერვალზე თავმოყრილ აბსოლუტურად უწყვეტ განაწილებას, ქვემოთ მოყვანილი შესაბამისი სიმკვრივით

$$f(x \mid a) \equiv \frac{f(x)}{S(a)} \cdot I\{x \geq a\}. \tag{4}$$

(3)-ით (და (4)-ით) განმარტებული განაწილების მნიშვნელობას ჩვენ დავინახავთ მომდევნო ნაწილში, სადაც უშუალოდ ნეტო-პრემიების დადგენაზე გადავალთ.

შენიშვნა. ცხადია, რომ $\mu(x) = f(x|x)$, მაგრამ ის რაც სამართლიანია (4)-ით განმარტებული $f(x|a)$ ფუნქციისათვის, კერძოდ, ის, რომ ეს ფუნქცია არის $F(x|a)$ განაწილების ფუნქციის შესაბამისი სიმკვრივე, ანუ $\int_0^\infty f(x \mid a)dx = \frac{1}{S(a)} \cdot \int_a^\infty f(x)dx = 1$, აღარაა სამართლიანი $\mu(x)$ ფუნქციისათვის. მართლაც,

$$\int_0^\infty \mu(x)dx = \left(-\ln S(x)\right)\Big|_0^\infty = \infty .$$

ასე, რომ $\mu(x)$ ფუნქცია არ წარმოადგენს რაიმე განაწილების შესაბამისი სიმკვრივის ფუნქციას. □.

დავუბრუნდეთ რისკის ფუნქციის (2) განმარტებას. ამ განმარტებიდან ჩანს, რომ განაწილებასა და რისკის ფუნქციას შორის არის ურთიერთცალსახა კავშირი. მართლაც, (2)-დან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\mu(x) = \left(-\ln S(x)\right)', \quad F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu(u)du\right), \quad f(x) = \mu(x)\exp\left(-\int_0^x \mu(u)du\right). \tag{5}$$

(5) ტოლობებიდან იმ დასკვნის გაკეთება შეიძლება, რომ ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის დახასიათება შესაძლებელია რისკის ფუნქციის ტერმინებშიც (და სხვათაშორის, ეს გარდაუვალიცაა ბევრ პრაქტიკულ სტატისტიკურ ამოცანაში, სადაც ბუნებრივ შესაფასებელ ობიექტს წარმოადგენს რისკის ფუნქცია და არა განაწილების ფუნქცია ან მისი სიმკვრივე. ასეა მაგალითად, კლინიკურ გამოკვლევებში, სადაც საჭიროა ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე დასკვნები გაკეთდეს კვლევის მომენტში ცოცხალ(!) ადამიანებზე დაკვირვებების საშუალებით).

3. ნეტო-პრემიების დადგენა

ამ ნაწილში ჩვენ მიმოვიხილავთ ნეტო-პრემიების დადგენის საკითხს სიცოცხლის დაზღვევის შემდეგ მარტივ მოდელში.

ვთქვათ, a ასაკში მყოფი A პიროვნება სადაზღვევო კომპანიასთან დებს ხელშეკრულებას (კომპანიისაგან ყიდულობს სადაზღვევო პოლისს), რომელიც ამ პიროვნების გარდაცვალების შემდეგ მის მემკვიდრეებს გარკვეული C თანხის მიღების გარანტიას აძლევს. თავის მხრივ, A პიროვნება იღებს ვალდებულებას გარდაცვალებამდე სადაზღვევო კომპანიას უხადოს გარკვეული p პრემია. ჩვენი ამოცანაა განვსაზღვროთ p პრემიის ის სიდიდე, რომელიც მისაღები იქნება როგორც კომპანიისათვის, ასევე A პიროვნებისათვის. p პრემიის ამ სიდიდეს ნეტო-პრემიას უწოდებენ. რა თქმა უნდა, აქ დასაზუსტებელია სიტყვა "მისაღების" მნიშვნელობა. თუ ამ სიტუაციას ორი მოთამაშის თამაშს შევადარებთ, მაშინ შესაბამისი ტერმინოლოგიით სიტყვა "მისაღები" ალბათ შეესაბამება ე.წ. სამართლიან თამაშს, რომელიც შეიძლება სხვადასხვანაირად გამოითქვას. ჩვენ აქ შევჩერდებით სამართლიანობის ორ განმარტებაზე:

1) კომპანიისა და A პიროვნების საშუალო მოგება ნულის ტოლია;

2) კომპანიისა და A პიროვნების მოგების შანსები თანაბარია.

იმისათვის, რომ მათემატიკურად ზუსტად ჩავწეროთ, თუ რას გულისხმობს სამართლიანობის 1) და 2) განმარტებები, დავუშვათ, რომ A პიროვნების სიცოცხლის ხანგრძლივობა აღიწერება წინა ნაწილში შემოღებული T შემთხვევითი სიდიდით. მაშინ ცხადია, რომ პიროვნება კომპანიას გადაუხდის თანხას, რომელიც მისი დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობისა და პრემიის ნამრავლის ტოლია, ანუ გადაუხდის $(T–a)\cdot p$-ის ტოლ თანხის სიდიდეს. ამიტომ მისი მოგება იქნება $C\text{-}(T\text{-}a)\cdot p$ (ცხადია, კომპანიის მოგება იქნება ამ თანხის მოპირდაპირე სიდიდე) და 1) და 2) განმარტებები ასე ჩაიწერება:

1) $E[C\text{-}(T\text{-}a)\cdot p] = 0$,

2) $P\{ C\text{-}(T\text{-}a)\cdot p \geq 0\}= P\{ C\text{-}(T\text{-}a)\cdot p < 0\} \Rightarrow P\{T \leq a + C/p\}=1/2$.

ამიტომ ნეტო-პრემიებისათვის შესაბამისად მივიღებთ:

$$p_E = \frac{C}{E[T-a]} = \frac{C}{ET-a} \tag{6}$$

და

$$p_m = \frac{C}{m-a}, \tag{7}$$

სადაც m აღნიშნავს P განაწილების მედიანას (მოხერხებულობისათვის ჩვენ p ნეტო-პრემიებს დავუსვით შესაბამისი ინდექსები, რაც ალბათ, არ გამოიწვევს გაუგებრობას). ბუნებრივია, აქ გაჩნდება შეკითხვა: რომელი P განაწილების მედიანაზეა 2)-ში საუბარი და რომელი P განაწილებით უნდა დავითვალოთ მათემატიკური ლოდინი 1)-ში, იმისათვის, რომ შესაბამისი ნეტო-პრემია მართლაც აკმაყოფილებდეს სამართლიანობის 1) და 2) განმარტებას? როგორც გვახსოვს, წინა ნაწილში ჩვენ გვქონდა T შემთხვევითი სიდიდის ორი, უპირობო და პირობითი განაწილება, $F(\cdot)$ და $F(\cdot|a)$. პასუხის გაცემა ზემოთ დასმულ კითხვაზე ალბათ არ გაგვიჭირდება, თუკი გავითვალისწინებთ იმას, რომ ხელშეკრულების გაფორმების მომენტში პიროვნება უკვე a ასაკს გადაცილებულია და მაშასადამე, მისთვის ცნობილია, რომ $T > a$. მაშასადამე, პასუხი ცალსახაა: ნეტო-პრემიების დადგენისას უნდა ვიხელმძღვანელოთ პირობითი და არა უპირობო განაწილებით. ეს რომ ასეა, ვაჩვენოთ, რომ უპირობო განაწილებით გამოთვლილი ნეტო-პრემიის სიდიდე "რამდენადმე გაბერილი" იქნება და მაშასადამე, კომპანიას "ადგილი რჩება" სიმულაციისათვის, თუკი ის გამოიყენებს უპირობო განაწილებას, ვითომდა "სამართლიანი" ნეტო-პრემიის დადგენისათვის. მართლაც, პირობითი განაწილებისას 1) შემთხვევისათვის გვაქვს

$$p_{E|a} \equiv p(a) = \frac{C}{E[T \mid T \geq a] - a} = \frac{C}{\int_0^{\infty}(u-a) f(u \mid a) du} = \frac{C}{\frac{1}{S(a)} \cdot \int_a^{\infty} u f(u) du - a} \equiv \frac{C}{\varphi(a) - a}. \tag{8}$$

ვაჩვენოთ, რომ φ ზრდადი ფუნქციაა. მართლაც, განვიხილოთ მისი წარმოებული და ვაჩვენოთ, რომ ის დადებითია:

$$\varphi'(a) = \left(\frac{1}{S(a)} \cdot \int_a^{\infty} u f(u) du \right)' = \frac{f(a)}{S(a)} (\varphi(a) - a) \geq 0,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $\varphi(a) \geq \varphi(0) = ET$. ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$p_{E|a} = \frac{C}{E[T \mid T \geq a] - a} \leq \frac{C}{ET - a} = p_E. \tag{9}$$

ანალოგიურად, 2) შემთხვევაშიც

$$p_{m|a}=\frac{C}{m_{F(\cdot|a)}-a}\le\frac{C}{m_{F(\cdot)}-a}=p_m\,, \tag{10}$$

რადგანაც

$$1/2=F(m_{F(\cdot|a)}\,|\,a)=\frac{S(a)-S(m_{F(\cdot|a)})}{S(a)}\,,\ \text{ანუ}\ \ S(m_{F(\cdot|a)})=(1/2)\cdot S(a)\le 1/2=S(m_{F(\cdot)})\,,$$

საიდანაც S ფუნქციის კლებადობის გამო დავასკვნით, რომ $m_{F(\cdot|a)}\ge m_{F(\cdot)}$ და მაშასადამე, ადგილი აქვს (9)-ს.

საბოლოოდ, (8) და (9)-დან ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ ჩვენ აღმოვჩნდებით დასაზღვევი პიროვნების როლში, არ უნდა მოვტყუვდეთ და სამართლიანი ნეტო-პრემია აუცილებლად პირობითი (და არა უპირობო!) განაწილებით უნდა დავაანგარიშებინოთ კომპანიას; მეორეს მხრივ, თუ ჩვენ აღმოვჩნდებით სადაზღვევო კომპანიის როლში, რომელიც დაინტერესებული უნდა იყოს სადაზღვევო პოლიტიკის სწორად წარმართვით (ანუ რაც შეიძლება მეტი კლიენტის მოზიდვით), მაშინ გააზრებული უნდა გვქონდეს, თუ რა შედეგები შეიძლება მოჰყვეს ჩვენს ნებსით, თუ უნებლიე შეცდომას ნეტო-პრემიის არასწორად დადგენისას (ლაპარაკია პირობითის მაგივრად, უპირობო განაწილების გამოყენებაზე); მაღალი ნეტო-პრემიების დაწესების შემთხვევაში ხომ კლიენტების რაოდენობა გაცილებით ნაკლები იქნება?

ამ მოდელში არაფერი იყო ნათქვამი იმის შესახებ, რომ "დრო-ფულია" ანუ იმაზე, რომ მაგალითად, a = 20 წლის ასაკში დაზღვეული პიროვნებისათვის არ უნდა იყოს მისაღები კომპანიის მიერ შემოთავაზებული თუნდაც საკმაოდ დიდი თანხა მხოლოდ გადახდილი საკმაოდ ბევრი წლის შემდეგ; მაგალითად, თუ C = \$100.000, და თუ ამ ახალგაზრდის სიცოცხლის ხანგრძლივობა მაგალითად, 70 წელი იქნება, (ამ ასაკს ჩვენ სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობად მივიჩნევთ), მისთვის არსებითია ის, რომ არსებობს ინფლაცია და მაშასადამე, \$100.000-ის ღირებულება 50 წლის შემდეგ სულაც არ იქნება ამ თანხის დღევანდელი ღირებულების ტოლი. ამიტომ გასათვალისწინებელია ე.წ. დისკონტირება (დისკონტირების მამრავლი) ანუ საჭიროა ჩავთვალოთ, რომ p თანხა, რომელსაც ის გადაიხდის დროის ერთეულში, ტოლია $e^{-\rho}\cdot p$ თანხისა დღევანდელ ფასებში (ρ

> 0). გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ პრემიის გადახდა ხდება თითქოსდა უწყვეტად (და არა დროის გარკვეულ მომენტებში, როგორც ეს რეალურად ხდება). შევნიშნოთ, რომ დისკრეტული გადასახადების გადათვლა საკმარისად მარტივად შეიძლება უწყვეტი გადასახადების საშუალებით, ხოლო უწყვეტ დროზე გადასვლით ყველაფერი გამოიყურება გაცილებით იოლად და ნათლად. გარდა ამისა, სიტუაციის ასეთი იდეალიზაცია სრულებითაც არ წარმოადგენს რეალობისაგან უხეშ გადახრას: ბანკები სესხებზე პროცენტებს რიცხავენ ყოველდღიურად, ხოლო ხშირ შემთხვევაში, კერძო პირების მიერ შენატანების გადახდა ხდება ყოველ ორ კვირაში ერთხელ, ანუ საკმარისად ხშირად. საბოლოოდ, $p{\cdot}ds$ თანხა, გადახდილი s დროის შემდეგ ds დროითი ინტერვალისათვის, საწყისი მომენტის ფასებში ღირს $e^{-\rho s}\cdot\, p{\cdot}ds$ და საერთოდ, დროის რაიმე t მომენტის ფასებში, მისი ფასის სიდიდე ტოლია $e^{\rho(t-s)}\cdot\, p{\cdot}ds$ თანხისა.

მაშასადამე, დროის (შემთხვევით!) (T-a) მომენტში, გადახდილი სადაზღვევო C თანხა დღევანდელ ფასებში ტოლია $C{\cdot}e^{\rho(T-a)}$ (შემთხვევითი) თანხისა, რომლის საშუალო მნიშვნელობა ტოლია

$$C\cdot E[e^{\rho(T-a)}\,|\,T>a] = C\cdot\int_a^\infty e^{-\rho(t-a)}\cdot\frac{f(t)}{1-F(a)}\,dt = C\cdot\int_0^\infty e^{-\rho u}\cdot\frac{f(u+a)}{1-F(a)}\,du\,. \qquad (11)$$

დროითი ds ინტერვალისათვის გადახდილი $p{\cdot}ds$ პრემიის ღირებულება დღევანდელ ფასებში ტოლია $e^{-\rho s}{\cdot}p{\cdot}ds$ სიდიდისა და ამიტომ მთელი გადახდილი პრემიის სიდიდე ტოლი იქნება

$$p\cdot\int_0^{T-a} e^{-\rho s}\,ds = p\cdot\int_0^\infty e^{-\rho s}\cdot I\{T-a>s\}\,ds\,. \qquad (12)$$

(12)-ის მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას აქვს პირდაპირი ინტერპრეტაცია: ds ინტერვალში პრემია $p{\cdot}ds$ გადახდილი იქნება, თუკი A პიროვნება ცოცხალია s მომენტში და პრემიის სიდიდე იქნება 0-ის ტოლი, თუკი ამ მომენტისათვის პიროვნება გარდაცვლილია.

(12)-ის გასაშუალებით მივიღებთ

$$E[p\int_0^{T-a} e^{-\rho u}\,du\,|\,T>a] = p\int_0^\infty e^{-\rho u}\,\frac{1-F(a+u)}{1-F(a)}\,du\,, \qquad (13)$$

(11) და (13) საშუალო მნიშვნელობების გატოლებით ნეტო-პრემიისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$p \cdot \int_0^{\infty} e^{-\rho u} \cdot \frac{1-F(a+u)}{1-F(a)} du = C \cdot \int_0^{\infty} e^{-\rho u} \cdot \frac{f(u+a)}{1-F(a)} du ,$$

საიდანაც ნეტო-ფასი (როგორც a ასაკისა და ρ-ს ფუნქცია) ტოლია

$$p(a,\rho) = C \cdot \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho s} \cdot f(s+a) ds}{\int_0^{\infty} e^{-\rho s} \cdot \left(1-F(a+s)\right) ds} = -C \cdot \frac{\partial}{\partial a}\left(\ln \int_0^{\infty} e^{-\rho u} \cdot (1-F(a+u)) du \right). \qquad (14)$$

ბუნებრივია, (სადაზღვევო კომპანიის პოზიციიდან გამომდინარე), ველოდეთ, რომ $p(a)$ ((8)-ში) და $p(a,\rho)$ ფუნქციები არის a-ს ზრდადი ფუნქციები. ეს მოლოდინი საფუძვლიანია, თუ ჩავთვლით, რომ ხანში შესული ადამიანის "წამიერი" სიკვდილის რისკი (სიკვდილიანობის ძალა) უფრო მაღალია, ვიდრე ახალგაზრდისა, ანუ $\mu(y) \geq \mu(z)$, როცა $y \geq z$. $\mu(y)$ ფუნქციის ზრდადობა საკმაოდ ზოგადი პირობაა (რაც იმას ნიშნავს, რომ დროის ზრდასთან ერთად ადამიანი "ბერდება"), რომელიც პრაქტიკულად ყოველთვის სრულდება (გარკვეული ასაკიდან დაწყებული მაინც) დემოგრაფიაში გამოყენებული განაწილებებისათვის. ამიტომ ჩვენც დავუშვებთ, რომ როცა $y \geq z \geq 0$,

$$\mu(y) \geq \mu(z). \qquad (15)$$

ვნახოთ, თუ როგორია ამ დაშვებაში $p(a)$ და $p(a,\rho)$ ფუნქციები როგორც a-ს ფუნქციები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $p(a) = p(a,0)$. ამიტომ საკმარისია შევისწავლოთ მხოლოდ $p(a,\rho)$ ფუნქცია. გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია a ცვლადით. (14) და (15)-დან მივიღებთ:

$$\frac{\partial p(a,\rho)}{\partial a} = \frac{C}{\left(E\left(\int_0^{T-a} e^{-\rho s} ds \,|\, T > a \right) \right)^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\rho u} \cdot \frac{1-F(a+u)}{1-F(a)} (\mu(a+u) - \mu(a)) du \geq 0 .$$

მაშასადამე, მართლაც $p(a)$ და $p(a,\rho)$ ფუნქციები არის a-ს ზრდადი ფუნქციები.

საინტერესოა, როგორაა დამოკიდებული $p(a,\rho)$ ფუნქცია საპროცენტო ρ განაკვეთზე? კერძოდ კი, საინტერესოა, თუ რომელია მეტი $p(a)$ და $p(a,\rho)$ ნეტო-ფასებიდან? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად გადავწეროთ ახლა (14) შემდეგი სახით:

$$p(a,\rho)=C\cdot\int\limits_0^{\infty}\mu(a+s)\cdot g(s,a,\rho)ds, \tag{16}$$

სადაც

$$g(s,a,\rho)\equiv\frac{e^{-\rho s}\cdot\big(1-F(a+s)\big)}{\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho u}\cdot\big(1-F(a+u)\big)du}=\frac{e^{-\rho(a+s)}\cdot\big(1-F(a+s)\big)}{\int\limits_a^{\infty}e^{-\rho u}\cdot\big(1-F(u)\big)du}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $g(s,a,\rho)\ \geq\ 0$ და $\int\limits_0^{\infty}g(s,a,\rho)ds=1$, ანუ $g(s,a,\rho)$, როგორც s-ის ფუნქცია, წარმოადგენს განაწილების სიმკვრივეს. ამიტომ ყოველი $\rho\ \geq\ 0$-სათვის და ყოველი $a\ \geq\ 0$-სათვის არსებობს არაუარყოფითი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე $Y_{a,\rho}$, რომლის განაწილების სიმკვრივესაც წარმოადგენს $g(s,a,\rho)$.

მასასადამე, (16) შეგვიძლია შემდეგი მოკლე სახით გადავწეროთ:

$$p(a,\rho)=C\cdot E_g\,\mu(a+Y_{a,\rho}),$$

საიდანაც უფრო მოხერხებულია არა $Y_{a,\rho}$, არამედ $Z_{a,\rho}\ \equiv a\ +\ Y_{a,\rho}$ შემთხვევითი სიდიდის განხილვა, რომლის ტერმინებშიც

$$p(a,\rho)=C\cdot E_h\,\mu(Z_{a,\rho})=C\cdot\int\limits_a^{\infty}\mu(s)\cdot h(s,a,\rho)ds, \tag{17}$$

სადაც

$$h(s,a,\rho)\equiv\frac{e^{-\rho s}\cdot\big(1-F(s)\big)}{\int\limits_a^{\infty}e^{-\rho u}\cdot\big(1-F(u)\big)du}\cdot I\{s\geq a\}=g(s-a,a,\rho)\cdot I\{s\geq a\} \tag{18}$$

წარმოადგენს $Z_{a,\rho}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს.

იმისათვის, რომ დავახასიათოთ ეს შემთხვევითი სიდიდე, განვიხილოთ მისი მათემატიკური ლოდინი:

$$EZ_{a,\rho}=\int\limits_0^{\infty}s\cdot h(s,a,\rho)ds=\frac{\int\limits_a^{\infty}s\cdot e^{-\rho s}\cdot\big(1-F(s)\big)ds}{\int\limits_a^{\infty}e^{-\rho u}\cdot\big(1-F(u)\big)du}\equiv\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left(\frac{1}{\psi(a,\rho)}\right), \tag{19}$$

სადაც

$$\psi(a,\rho)\equiv\int\limits_a^{\infty}e^{-\rho u}\cdot\big(1-F(u)\big)du\ . \tag{20}$$

(17)-დან ცხადია, რომ

$$\frac{\partial}{\partial\rho}p(a,\rho)=C\cdot\int_a^\infty \mu(s)\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}h(s,a,\rho)ds=C\cdot\int_a^\infty (EZ_{a,\rho}-s)\cdot\mu(s)\cdot h(s,a,\rho)ds=$$

$$=-C\cdot\left(E\left(Z_{a,\rho}\cdot\mu(Z_{a,\rho})\right)-EZ_{a,\rho}\cdot E\mu(Z_{a,\rho})\right)=-C\cdot\operatorname{cov}\left(Z_{a,\rho};\mu(Z_{a,\rho})\right). \quad (21)$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება:

თეორემა 1. იმისათვის რომ (14)-ით განმარტებული ნეტო-ფასი იყოს ρ ცვლადის კლებადი ფუნქცია, აუცილებელია და საკმარისია, რომ რისკის μ ფუნქცია იყოს ისეთი, რომ (18) განაწილების მქონე $Z_{a,\rho}$ და $\mu(Z_{a,\rho})$ შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია იყოს არაუარყოფითი.

გადავიდეთ ახლა იმის შესწავლაზე თუ როდისაა თეორემა სამართლიანი ანუ როგორი μ ფუნქციებისათვის სრულდება უტოლობა

$$\operatorname{cov}\left(Z_{a,\rho};\mu(Z_{a,\rho})\right)\geq 0\,. \quad (22)$$

შედეგი 1. თუ რისკის μ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ (22) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $a \geq 0$ და $\rho \geq 0$-თვის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mu(z)$ ფუნქცია ზრდადია. მაშინ ცხადია, რომ ერთის ტოლი ალბათობით სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$(Z_{a,\rho}-EZ_{a,\rho})\cdot(\mu(Z_{a,\rho})-\mu(EZ_{a,\rho}))\geq 0\,,$$

საიდანაც გასაშუალების შემდეგ მიიღება (22) და მაშასადამე, $p(a,\rho)$ არის ρ ცვლადის კლებადი ფუნქცია. □