საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ინსტიტუტი
გამოყენებითი მათემატიკის კათედრა

გიორგი მახარაძე

პრეტენზიების რაოდენობის განაწილების აღწერა კოლექტიური რისკის მოდელში

სპეციალობა 0102 - ფინანსური მათემატიკა

სადიპლომო ნაშრომი

ბაკალავრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ფ.მ.მ.კ. დოც. გ.მირზაშვილი

თ ბ ი ლ ი ს ი

2003

§ 1. შესავალი

სადაზღვევო კომპანიის სტაბილური ფუნქციონირების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან წინაპირობას წარმოადგენს მისი საანგარიშო პერიოდის ჯამური ზარალის (პრეტენზიის) ანალიზი. ეს მაჩვენებელი, ცხადია, შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც ფორმირდება როგორც ცალკეული პრეტენზიების (ასევე შემთხვევითი სიდიდეების) ჯამი. მეორეს მხრივ, გასაგებია, რომ ასევე შემთხვევითია საანგარიშო პერიოდში (მაგალითად, ერთი კალენდარული წლის განმავლობაში) კომპანიაში შემოსული პრეტენზიების რაოდენობაც. ამგვარად, საანგარიშო პერიოდის ჯამური ზარალი წარმოდგება როგორც ჯამი შემთხვევით სიდიდეთა შემთხვევითი რაოდენობისა. ასეთ მოდელს რისკის თეორიაში კოლექტიური რისკის მოდელს უწოდებენ. გასაგებია, რომ ამ მოდელში ჯამური ზარალი არსებითად არის დამოკიდებული ორივე ტიპის შემთხვევითობაზე: თუ ერთის მხრივ, საინტერესოა რამხელა შესაკრებები იკრიბება, მეორეს მხრივ, ჯამისათვის მნიშვნელოვანია ის, თუ რამდენი ასეთი შესაკრები იკრიბება.

წინამდებარე ნაშრომის მიზანს შეადგენს პრეტენზიათა რაოდენობის, როგორც დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის აღრიცხვა. ტექსტში გამოყენებულია კლასიკური აღნიშვნები – შემთხვევით სიდიდეებს აღვნიშნავთ დიდი, ხოლო მათ შესაძლო მნიშვნელობებს პატარა ლათინური ასოებით.

დავუშვათ, რომ S_N არის პორტფელის (სადაზღვევო კომპანიის მიერ დადებულ სადაზღვევო ხელშეკრულებათა ერთობლიობის) ჯამური პრეტენზია, მაშინ:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i \, , \tag{1.1}$$

სადაც Y-ები ცალკეულ პრეტენზიათა სიდიდეებია. ამ ნაშრომის ფარგლებში იგულისხმება, რომ Y-ები დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული, მთელი არაუარყოფითმნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეებია, N კი, საანგარიშო პერიოდში პრეტენზიათა შემთხვევითი რაოდენობაა, რომელიც დამოუკიდებელია Y-ებისაგან. Y-ების მთელი მნიშვნელობები დისკრეტულობის ზოგადობას არ ზღუდავს, რადგან ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება მოხერხებული ფულადი ერთეულის

არჩევით, ხოლო N-ის და Y-ების დამოუკიდებლობა იმას ნიშნავს, რომ S_N ჯამურ პრეტენზიას ექნება ე.წ. შედგენილი (Compound) განაწილება:

$$P\{S_N \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_Y^{n*}(x)\,, \tag{1.2}$$

სადაც p_n-ით აღნიშნულია N შემთხვევითი სიდიდის განაწილება:

$$p_n = P\{N = n\}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1\,, \quad p_{-n} = 0\,, \quad \forall n \in \mathrm{N}\,, \tag{1.3}$$

ხოლო $F_\xi(x)$-ით (და შემდგომში, $f_\xi(x)$-ით) აღნიშნულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია (სიმკვრივე). $F_\xi^{n*}(x)$ აღნიშნავს ξ-ის განაწილების n-ჯერადი ნახვევის ოპერაციას.

ნაშრომში გამოყენებული იქნება ისეთი შედგენილი განაწილებაც, სადაც Y-ები აღარაა ერთნაირად განაწილებული. ეს შემთხვევა განხილულია [4] ნაშრომში, რომელშიც (1.1) ჯამის შესაკრებებს აქვს სახე:

$$Y_k = \upsilon^k \cdot X_k \tag{1.4}$$

სადაც X-ები დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული დადებითმნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო υ – დისკონტ-ფაქტორია (იგი გამოიყენება ფინანსური ნაკადის ‘‘დღევანდელი’’ მნიშვნელობის დასადგენად). შესაბამისად, ჯამური პრეტენზია ტოლია:

$$S_N(\upsilon) = \sum_{k=1}^{N} \upsilon^k \cdot X_k \tag{1.5}$$

ამ მოდელში X_k-ები წარმოადგენს k-ური წლის ჯამურ პრეტენზიას, რომელიც გადაიხდება წლის ბოლოს, ხოლო N –იმ წლების რაოდენობას, რომლთა განმავლობაშიც ხდებოდა ეს ზარალები; შესაბამისად, (1.5)-ის მიხედვით, $S_N(\upsilon)$ წარმოადგენს ჯამური ზარალის „დღევანდელ“ ღირებულებას.

(1.2) ფორმულის თანახმად, სამართლიანია ტოლობა:

$$F_{S_N}(x) = P\{S_N \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_{S_n}(x) \tag{1.6}$$

შევნიშნოთ, რომ Y-ების დამოუკიდებლობის გამო $F_{S_n}(x)$-სათვის ადგილი აქვს შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას:

$$F_{S_n}(x)=\int_0^x F_{S_{n-1}}(x-y)dF_Y(y) \qquad (1.7)$$

იმისათვის, რომ მსგავსი რეკურენტული ფორმულა დაიწეროს F_{S_N}-სათვის, (1.6)-დან გასაგებია, რომ p_n-ებიც მოცემული უნდა იყოს რეკურენტული წესით. წინააღმდეგ შემთხვევაში, $F_{S_N}(x)$ ალბათობების თვლა მოითხოვს $F_Y(y)$-ის ყველა რიგის ნახვევის გამოთვლას, რაც პრაქტიკულად მხოლოდ ე.წ. უსასრულოდ დაყოფადი $F_Y(y)$ განაწილებებისთვის არის შესაძლებელი.

[2] ნაშრომში Panjer-მა განიხილა პრეტენზიის რაოდენობათა განაწილებები, რომლებიც შემდეგი რეკურენტული წესით მოიცემა:

$$p_n = p_{n-1}\cdot\left(a+\frac{b}{n}\right), \quad n=1,2,... \quad , \qquad (1.8)$$

სადაც p_0, a და b ისეთებია, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \quad p_n > 0, \quad \forall n \in \mathrm{N}_0 = N \cup \{0\} \qquad (1.9)$$

(1.8)-ით მოცემულ განაწილებათათვის (რომელსაც ჩვენ ქვემოთ Panjer-ის განაწილებათა კლასად მოვიხსენიებთ) ზემოაღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია S_N-ის განაწილების სიმკვრივის (ალბათობათა განაწილების) გამოსათვლელი შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$f_{S_N}(0)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot f_Y{}^n(0), \qquad (1.10)$$

$$f_{S_N}(x)=P\{S_N = x\}=\frac{1}{1-a\cdot f_Y(0)}\cdot\sum_{y=1}^{x}\left(a+\frac{by}{x}\right)\cdot f_Y(y)\cdot f_{S_N}(x-y), \quad x=1,2,... \qquad (1.11)$$

ცნობილია, რომ Panjer-ის განაწილებათა კლასი შედგება გადაუგვარებელ განაწილებათა მხოლოდ სამი ოჯახისაგან. ესენია: პუასონის, ბინომური და უარყოფითი ბინომური განაწილებები.

შევნიშნოთ, რომ მათთვის ცნობილია ალბათობათა გამოსათვლელი პირდაპირი ფორმულები. სამწუხაროდ, ასეთი ფორმულები პრაქტიკულად ძნელი მისაღებია რეკურენტული წესით მოცემულ განაწილებათა ისეთი კლასებისათვის, როგორიცაა მაგ.: Sundt-ის, Ramsay-ის, Willmot-Panjer-ის, Hesselager-ის, Wang-Sobrero-ს და ა.შ. კლასები.

ნაშრომის მე-2 პარაგრაფში მოცემულია ზოგიერთი მათგანის შედარებით დაწვრილებითი აღწერა, რომელიც იმეორებს უკვე ცნობილ ბევრ შედეგს. ეს ყველაფერი კეთდება იმისათვის, რომ ეს შედეგები და მათი მიღების გზები შედარდეს ნაშრომის მე-3 პარაგრაფში შემოთავაზებულ მთვლელ განაწილებათა კლასების აღწერას ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქციების ტერმინებში.

კერძოდ, §3-ში საუბარია $p_n = P\{N = n\}$ ალბათობათა გამოსათვლელ შემდეგ განზოგადებულ რეკურენტულ ფორმულაზე:

$$p_n = (a + b \cdot c_n) \cdot p_{n-1} \tag{1.12}$$

სადაც $\{c_n\}$- არის არაუარყოფითი რიცხვების რაღაც მიმდევრობა, რომელსაც a და b მუდმივებთან ერთად მოეთხოვება მხოლოდ (1.9) პირობების შესრულება.

როგორც შემდგომში ვნახავთ, ეს რეკურენტული თანაფარდობა წარმოადგენს ზემოთნახსენები ყველა რეკურენტული ფორმულის ერთიან ზოგად ფორმას და მაშასადამე, §3 მიზნად ისახავს სხვადასხვა კლასების აღწერის უნიფიცირებას. რა თქმა უნდა, აღწერა შეუძლებელი იქნებოდა $\{c_n\}$-ზე დამატებითი პირობების გარეშე, რასაც ჩვენ გამოვთქვამთ N შემთხვევითი სიდიდის მაწარმოებელი ფუნქციის ტერმინებში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ (1.12)-ით მოცემული განაწილების (N-ის) მაწარმოებელი ფუნქცია წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\varphi_N(t) = \frac{1 - a - b \cdot \int_t^1 \psi(s)ds}{1 - at} \tag{1.13}$$

სადაც

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot c_{n+1} \cdot p_n \cdot t^n \tag{1.14}$$

ფუნქცია წარმოადგენს (1.13) მაწარმოებელი ფუნქციის ე.წ. *გენერატორს* (უფრო დაწვრილებით, იხ. §3). გასაგებია, რომ იმის მიხედვით, თუ როგორია $\psi(t)$ ფუნქცია, $\varphi_N(t)$ (და შესაბამისად, p_n ალბათობები) ცალსახად განიმარტება და მაშასადამე, $\{c_n\}$-ზე დამატებითი პირობების თქმა ნიშნავს $\psi(t)$ გენერატორზე გარკვეული მოთხოვნების დადებას.

ნაშრომის მე-3 პარაგრაფში საკმარისად ზოგადი სახის $\psi(t)$ გენერატორისათვის მოცემულია (1.13) ინტეგრალური განტოლების $\varphi_N(t)$ ამონახსნის

ფორმა. გარდა ამისა, მოძებნილია იმ $\psi(t)$ გენერატორის სახეები, რომლებიც შეესაბამება მე-2 პარაგრაფში აღწერილ რეკურენტულ ფორმულებს. შესაბამის შედგენილ განაწილებათა რეკურენტული ფორმულებისათვის იხ. [10] ნაშრომი.

§ 2. მთვლელ განაწილებათა კლასების აღწერა რეკურენტული წესით

ამ თავში დაწვრილებით განვიხილავთ Panjer-ის განაწილებათა კლასს. გარდა ამისა, მოვიყვანთ რეკურენტული წესით მოცემულ განაწილებათა ცნობილი კლასების სახეებს.

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, **Panjer**-ის კლასი მოიცემა შემდეგი რეკურენტული წესით:

$$p_n = p_{n-1} \cdot \left(a + \frac{b}{n}\right) \quad , \qquad n = 1,2,\ldots \quad , \tag{2.1}$$

სადაც p_0, a და b რაიმე მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad , \quad p_n > 0 \, , \quad n = 0,1,\ldots \quad . \tag{2.2}$$

საინტერესოა, როგორია ასეთი წესით მოცემული განაწილების ისეთი მნიშვნელოვანი მახასიათებლები, როგორიცაა საშუალო, დისპერსია და ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქცია.

გადავწეროთ (2.1) შემდეგი სახით:

$$n \cdot p_n = a \cdot (n-1) \cdot p_{n-1} + (a+b) \cdot p_{n-1}$$

ტოლობის ორივე მხარის აჯამვით მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot p_{n-1} + (a+b) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} \, ,$$

$$EN = a \cdot EN + a + b$$

ანუ საიდანაც

$$EN = \frac{a+b}{1-a} \, . \tag{2.3}$$

იგივე გზით შესაძლებელია დისპერსიის მიღებაც

$$DN = \frac{a+b}{(1-a)^2} = \frac{EN}{1-a} \, . \tag{2.4}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.1) და (2.3)-დან გამომდინარეობს, რომ $a < 1$, ხოლო (2.4)-დან დავასკვნით, რომ $DN < EN$ როცა $a < 0$ და $DN > EN$, როცა $0 < a < 1$. ახლა კი ვიპოვოთ N-ის ალბათობათა მაწარმოებელი $\varphi_N(t)$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, არაუარყოფითი მთელმნიშვნელობებიანი ξ შემთხვევითი სიდიდის ალბათობათა

მაწარმოებელი ფუნქცია (შემდგომში უბრალოდ “მაწარმოებელი ფუნქცია”) ასე განიმარტება:

$$\varphi_{\xi}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\xi=n\}\cdot t^{n}\ ,\qquad 0<t<1\quad . \tag{2.5}$$

მას გააჩნია შემდეგი ძირთადი თვისება:

$$P\{\xi=n\}=\frac{\varphi_{N}^{(n)}(0)}{n!}\ . \tag{2.6}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $P\{N=n\}=p_n$, (2.1)-დან გვექნება

$$p_n\cdot t^{n}=a\cdot p_{n-1}\cdot t^{n}+\frac{b}{n}\cdot p_{n-1}\cdot t^{n}\ .$$

თუ ავჯამავთ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cdot t^{n}=a\cdot t\cdot\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}\cdot t^{n-1}+b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot p_{n-1}\cdot t^{n}\ ,$$

ანუ

$$\varphi_N(t)-p_0=at\cdot\varphi_N(t)+b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot p_{n-1}\cdot t^{n}\ .$$

ორივე მხარის გაწარმოებით მივიღებთ ტოლობას

$$\varphi_N'(t)=a\cdot\varphi_N(t)+at\cdot\varphi_N'(t)+b\cdot\varphi_N(t)\ ,$$

საიდანაც

$$\varphi_N'(t)\cdot(1-at)=\varphi_N(t)\cdot(a+b)\quad \text{ან}\quad [\ln\varphi_N(t)]'=\frac{a+b}{1-at}\ . \tag{2.7}$$

როცა $a\neq 0$, მივიღებთ

$$\ln\varphi_N(t)=-\frac{a+b}{a}\ln(c\cdot(1-at)),$$

საიდანაც

$$\varphi_N(t)=\left(\frac{c}{1-at}\right)^{\frac{a+b}{a}}\ ,$$

სადაც c ინტეგრების შედეგად გაჩენილი მუდმივია. რადგან მაწარმოებელი ფუნქციის მნიშვნელობა $t=1$ წერტილში ცნობილია და ტოლია 1-ის, ამიტომ

$$\left(\frac{c}{1-a}\right)^{\frac{a+b}{a}}=1\quad\Rightarrow\quad c=1-a$$

და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\varphi_N(t) = \left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{\frac{a+b}{a}} \equiv \varphi_N(t;a,b)\,. \tag{2.8}$$

ადვილი საჩვენებელია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა, რომლის დამტკიცების ორი განსხვავებული ვერსია მოგვყავს მაწარმოებელ ფუნქციათა მეთოდის როლის წარმოსაჩენად.

თეორემა 1. თუ N შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მოცემულია (2.1) რეკურენტული წესით, მაშინ გადაუგვარებელ განაწილებათა მხოლოდ სამი ოჯახი, პუასონის, ბინომური და უარყოფითი ბინომური აკმაყოფილებს მას.

დამტკიცება (I). განვიხილოთ a-ს მიხედვით სამი სხვადასხვა შემთხვევა:

ა) როცა $a=0$. მაშინ (2.8) გამოსახულებას აზრი აქვს მხოლოდ ზღვარში. ამიტომ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ეს ზღვარი ან დავუბრუნდეთ (2.7)-ს და ამოვხსნათ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება. (2.7)-დან მივიღებთ

$$\left[\ln\varphi_N(t)\right]' = b \quad\Rightarrow\quad \varphi_N(t) = e^{bt+c}\,.$$

კვლავ, $\varphi_N(1)=1$ ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $c = -b$ და მაშასადამე, მივიღებთ, რომ

$$\varphi_N(t) = e^{b\cdot(t-1)}\,. \tag{2.9}$$

ვაჩვენოთ იგივე ზემოხსენებული ზღვრის გამოთვლით. მართლაც, ყოველ t-ში, $0\le t\le 1$, გვაქვს

$$\lim_{a\to0}\left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{1+\frac{b}{a}} = \lim_{a\to0}\left(1-\frac{a\cdot(1-t)}{1-at}\right)^{\frac{b}{a}} = \lim_{a\to0} e^{\frac{b}{a}\cdot\ln\left(1-\frac{a\cdot(1-t)}{1-at}\right)} =$$

$$= \lim_{a\to0} e^{-\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a\cdot(1-t)}{1-at}\right)} = e^{-b\cdot(1-t)} = e^{b\cdot(t-1)} \tag{2.10}$$

(2.9)-დან ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\varphi_N^{(n)}(t) = b^n\cdot e^{b(t-1)}\,,$$

და მაშასადამე,

$$p_n = \frac{\varphi_N^{(n)}(0)}{n!} = \frac{b^n}{n!}\cdot e^{-b}\,. \tag{2.11}$$

ეს კი არის პუასონის განაწილება b პარამეტრით.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ როცა $a=0$, (2.1) სახით მოცემული განაწილება წარმოადგენს <u>პუასონის</u> განაწილებას b პარამეტრით. ამ შემთხვევაში, (2.1) რეკურენტული ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$p_n = \frac{b}{n} \cdot p_{n-1}. \tag{2.12}$$

ბ) როცა $a < 0$. გავიხსენოთ ბინომური $B(M, p)$ განაწილების მაწარმოებელი ფუნქციის ანალიზური სახე (იხ. [11]):

$$\varphi(t) = \left(1 - p \cdot (1 - t)\right)^M \tag{2.13}$$

თუ (2.8)-ში a და b პარამეტრების ნაცვლად ჩავსვამთ

$$a = -\frac{p}{1-p} \quad , \quad b = \frac{p}{1-p} \cdot (M+1) \tag{2.14}$$

მნიშვნელობებს მაშინ მივიღებთ სწორედ (2.13)-ს. იქიდან, რომ M და p ნებისმიერი რიცხვებია (შესაბამისი განსაზღვრის არიდან), ვასკვნით, რომ $a < 0$ შემთხვევას შეესაბამება <u>ბინომური</u> განაწილება. ცხადია, (2.1) რეკურენტული ტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$p_n = \frac{(M - n + 1) \cdot p}{n \cdot (1 - p)} \cdot p_{n-1} \tag{2.15}$$

გ) როცა $a > 0$. გავიხსენოთ უარყოფითი ბინომური $B^{-}(M, p)$ განაწილების მაწარმოებელი ფუნქციის ანალიზური სახე (იხ. [11]):

$$\varphi(t) = \left(\frac{p}{1 - t + pt}\right)^M \tag{2.16}$$

ამ შემთხვევაშიც, თუ (2.8) ფორმულაში a და b პარამეტრების ნაცვლად ჩავსვამთ

$$a = 1 - p \quad , \quad b = (1 - p) \cdot (M - 1) \tag{2.17}$$

მნიშვნელობებს, მივიღებთ სწორედ (2.16) გამოსახულებას, ანუ p-ს და M-ის ნებისმიერობიდან გამომდინარე, $a > 0$ შემთხვევას შეესაბმება <u>უარყოფითი ბინომური</u> განაწილება. ამ შემთხვევაში რეკურენტული ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$p_n = \frac{(M + n - 1) \cdot p}{n} \cdot p_{n-1}. \tag{2.18}$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $M = 1$, (2.17)-დან ვღებულობთ, რომ

$$b = 0, \tag{2.19}$$

ხოლო (2.1) რეკურენტულ თანადობა იღებს შემდეგ სახეს

$$p_n = p \cdot p_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.20}$$

რაც ცხადია, იმას ნიშნავს, რომ N-ს აქვს <u>გეომეტრიული</u> განაწილება.

დამტკიცება (II)(**Sundt & Jewell (იხ. [7])**): იმისათვის, რომ გამოვრიცხოთ უარყოფითი ალბათობები, აუცილებელია, რომ $a+b\geq 0$. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

ა) $a=0$. ამ შემთხვევაში (2.1)-დან ვასკვნით, რომ

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{b}{n}\Rightarrow p_n=\frac{b^n}{n!}\cdot p_0,$$

ხოლო $\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$p_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=1\Rightarrow p_0=e^{-b}.$$

საბოლოოდ

$$p_n=\frac{b^n}{n!}\cdot e^{-b},$$

და მაშასადამე ჩვენ მივიღებთ პუასონის განაწილებას $\lambda=b$ პარამეტრით.

ბ) $a>0$. მაშინ (2.1) დან მივიღებთ:

$$p_n=p_0\cdot a^n\cdot\frac{\Gamma(n+M)}{n!\cdot\Gamma(M)} \tag{2.21}$$

სადაც $M=\frac{a+b}{a}$ ხოლო $\Gamma(x)$ არის გამა-განაწილება.

მაშასადამე (2.21) საბოლოოდ ასეთ სახეს მიიღებს

$$p_n=\frac{\Gamma(n+M)}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(M)}\cdot a^n\cdot(1-a)^M,$$

რაც სწორედ უარყოფით ბინომურ ალბათობებს წარმოადგენს პარამეტრებით a და M.

გ) $a<0$. იმისათვის, რომ (2.1)-ში ადგილი არ ჰქონდეს უარყოფით ალბათობებს, განვიხილოთ ფუნქცია $h(x)=(1-x)^{-M}$, $x<1$. მაშინ ცხადია, რომ

$$h_M^{(n)}(0)=\frac{\Gamma(n+M)}{\Gamma(M)}$$

და (2.21) ასეთ სახეს მიიღებს

$$p_n=p_0\cdot\frac{h_M^{(n)}(0)}{n!}\cdot a^n.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$, გვქნება

$$p_0=(1-a)^M \quad \text{და} \quad b>(-a)\cdot n$$

ნებისმიერი n-სათვის, რაც შესაძლებელია და რაც იმას ნიშნავს, რომ დაწყებული გარკვეული M ნომრიდან $p_M = 0$, როცა $n > M$. ამისათვის საკმარისია, რომ

$$a + \frac{b}{M+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M = -\frac{a+b}{a}. \qquad (2.22)$$

(2.1)-დან ადვილად მივიღებთ, რომ $p_n = p_0 \cdot C_M^n \cdot (-a)^n$. თუ ავჯამავთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს, გვექნება

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_M^n \cdot (-a)^n = 1 \Rightarrow p_0 = (1-a)^{-M}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში მივიღეთ ბინომური განაწილება

$$p_n = C_M^n \cdot p^n \cdot (1-p)^{M-n} \quad , \quad (0 < p < 1, \quad N = 1,2,...) \qquad (2.23)$$

$p = -\dfrac{a}{1-a}$ პარამეტრით.

ახლა მოვიყვანოთ განაწილებათა სხვა კლასების აღწერა:

ა) **Sundt**-ის ([6]) კლასი, რომელიც წარმოადგენს Panjer-ის კლასის განზოგადებას, მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ფორმულით:

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n} \right) \cdot p_{n-i} \quad , \qquad n = 1,2,... \quad , \qquad (2.24)$$

$k = 2$ შემთხვევა განხილულია [5] ნაშრომში და მიღებული განაწილება აღწერს **Schroter** -ის განაწილებათა კლასს.

ბ) **Ramsay**-ის ([4]) კლასი, რომელიც შედგება ე.წ. ანუიტეტური განაწილებებისაგან:

$$p_n = \left(a + \frac{b}{a(n,\delta)} \right) \cdot p_{n-1} \quad , \qquad n = 1,2,... \quad , \qquad (2.25)$$

$$a(n,\delta) = \sum_{k=1}^{n} e^{k\delta} = \frac{1-e^{-\delta}}{e^{n\delta}-1} \quad , \qquad -\infty < \delta < \infty \quad . \qquad (2.26)$$

δ-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$a(n,\delta) = \begin{cases} a_n = \dfrac{1-\upsilon^n}{i} & \text{თუ } e^{\delta} = \upsilon \le 1 \\ n & \text{თუ } e^{\delta} = 1 \\ \ddot{s}_n = \sum_{k=1}^{n} (1+r)^k & \text{თუ } e^{\delta} = 1+r, \quad r > 0 \end{cases} \qquad (2.27)$$

სადაც r არის ინფლაციის ძალა. როგორც ვხედავთ, Panjer-ის კლასი Ramsay-ის კლასის კერძო შემთხვევასაც წარმოადგენს, როცა $\delta = 0$.

გ) **Panjer-Willmot**-ის ([3]) კლასი, რომლისთვისაც ალბათობათა გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა შემდეგი სახისაა:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot n + \alpha_2 \cdot n^{(2)} + \ldots\right) \cdot p_n = \left(\beta_0 + \beta_1 \cdot (n-1) + \beta_2 \cdot (n-1)^{(2)} + \ldots\right) \cdot p_{n-1}$$

$$n = 1,2,\ldots, \tag{2.28}$$

სადაც

$$n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \tag{2.29}$$

ცნობილია, რომ (იხ. [3]) (2.28) სახით მოცემული განაწილებათა კლასი მოიცავს:

1) პუასონის განაწილებას. ამ შემთხვევაში (2.28) რეკურენტულ ფორმულაში შემავალი საწყისი პარამეტრებია:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = \lambda, \quad \beta_1 = 0; \tag{2.30}$$

2) ბინომურ განაწილებას

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1 - p, \quad \beta_0 = M - p, \quad \beta_1 = -p; \tag{2.31}$$

3) უარყოფით ბინომურ განაწილებას

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = pM, \quad \beta_1 = p; \tag{2.32}$$

4) ჰიპერგეომეტრიულ განაწილებას

$$p_n = \frac{C_N^n \cdot C_{M-N}^{m-n}}{C_M^n}, \tag{2.33}$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = M - N - m + 1, \quad \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_0 = N \cdot m, \quad \beta_1 = -(N + m - 1), \quad \beta_2 = 1; \tag{2.34}$$

5) ჰიპერ-პუასონის განაწილებას

$$p_n = C \cdot \frac{\theta^n}{(\lambda + n - 1)^{(n)}}, \tag{2.35}$$

$$\alpha_0 = \lambda - 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = \theta, \quad \beta_1 = 0; \tag{2.36}$$

6) ლოგარითმულ განაწილებას

$$p_n = \frac{-\theta^{n+1}}{(n+1) \cdot \ln(1-\theta)}, \tag{2.37}$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = \theta, \quad \beta_1 = \theta; \tag{2.38}$$

7) Polya-Eggenberger-ის (უარყოფითი ჰიპერგეომეტრიულ) განაწილებას

$$p_n = \frac{C_{-a}^{n} \cdot C_{-b}^{N-n}}{C_{-a-b}^{N}} \quad , \tag{2.39}$$

$$\alpha_0 = 0\,, \quad \alpha_1 = M + b - 1\,, \quad \alpha_2 = -1\,,$$

$$\beta_0 = aN\,, \quad \beta_1 = N - a - 1\,, \quad \beta_2 = -1\,; \tag{2.40}$$

8) <u>Waring</u>–ის განაწილებას

$$p_n = \frac{(\lambda - a) \cdot (a + n - 1)^{(n)}}{(\lambda + n)^{(n+1)}} \quad , \tag{2.41}$$

$$\alpha_0 = \lambda\,, \quad \alpha_1 = 1\,, \quad \beta_0 = a\,, \quad \beta_1 = 1; \tag{2.42}$$

9) <u>განზოგადებული Waring</u>–ის განაწილებას

$$p_n = \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+\alpha)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)\cdot\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(a+b+\alpha+n)} \quad , \tag{2.43}$$

$$\alpha_0 = 0\,, \quad \alpha_1 = a + b + \alpha\,, \quad \alpha_2 = 1\,,$$

$$\beta_0 = \alpha \cdot (a+1)\,, \quad \beta_1 = a + \alpha - 2\,, \quad \beta_2 = 1\,. \tag{2.44}$$

დ) **Hassalager**-ის ([1]) კლასი, რომელიც წარმოადგენს Panjer-Willmot-ის კლასის უფრო ზოგად ფორმას. ამ კლასის შესაბამის ალბათობათა გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულაა:

$$p_n = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i}{\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot n^i} \cdot p_{n-1}\,, \qquad n = 1,2,... \tag{2.45}$$

ე) **Wang-Sobrero**-ს ([8]) კლასი კი არის Hasselager-ის კლასის განზოგადება. მისი შესაბამისი რეკურენტული ფორმულაა:

$$\left(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot n^i \right) \cdot p_n = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_{j,\,i} \cdot (n-j)^i \right\} \cdot p_{n-j}\ ,$$

$$n = c, c+1, \ldots, \qquad \forall c \in \mathrm{N}\,. \tag{2.46}$$

§ 3. მთვლელ განაწილებათა კლასების აღწერა ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქციის ტერმინებში

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ჩვენ ძირითად მიზანს შეადგენს N ზარალების რაოდენობის $p_n = P\{N = n\}$ ალბათობათა გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმით მოცემულ განაწილებათა სხვადასხვა კლასების აღწერა. ასეთი კლასების ერთიანი აღწერისათვის, p_n ალბათობებისათვის შემოვიტანოთ რეკურენტული თანადობა, რომელიც აზოგადებს ჩვენთვის უკვე ცნობილ ყველა რეკურენტულ ტოლობას. როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, ასეთ ზოგად ფორმას წარმოადგენს შემდეგი სახით მოცემული ფორმულა:

$$p_n = (a + b \cdot c_n) \cdot p_{n-1} \tag{3.1}$$

სადაც a და b ნამდვილი რიცხვები და $\{c_n\}$ არაუარყოფით რიცხვთა რაღაც მიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad , \qquad p_n > 0 \ , \quad n = 0,1,\ldots \tag{3.2}$$

ბუნებრივია დავსვათ შეკითხვა: როგორი მაწარმოებელი ფუნქცია შეიძლება ჰქონდეს (3.1) სახით მოცემულ განაწილებას ? (3.1)-დან გვექნება:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot t^n = at \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} \cdot t^{n-1} + b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot p_{n-1} \cdot t^n$$

$$\varphi_N(t) - p_0 = at \cdot \varphi_N(t) + b \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot p_n \cdot t^{n+1} \tag{3.3}$$

განვიხილოთ

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot p_n \cdot t^{n+1}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot c_{n+1} \cdot p_n \cdot t^n \equiv \psi(t) \tag{3.4}$$

სადაც $\psi(t)$ ფუნქციას ვუწოდოთ *მაწარმოებელ ფუნქციათა გენერატორი.* მაშინ (3.3) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\varphi_N(t) \cdot (1 - at) = p_0 + b \cdot \int_1^t \psi(s) ds$$

და რადგან $\varphi_N(1) = 1 \ \Rightarrow \ p_0 = 1 - a$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi_N(t) = \frac{1 - a - b \cdot \int_t^1 \psi(s)ds}{1 - at}. \qquad (3.5)$$

ამრიგად, $\varphi_N(t)$ ფუნქცია და შესაბამისად p_n ალბათობები ცალსახად განისაზღვრება $\psi(t)$ ფუნქციის მეშვეობით. ამდენად, მისთვის მართლაც გამართლებულია სახელი: მაწარმოებელი ფუნქციის გენერატორი. მაშასადამე, $\psi(t)$ ფუნქციაზე გარკვეული მოთხოვნებს დაკმაყოფილებით, ჩვენ $\{c_n\}$-ს ვადებთ პირობებს.

ქვემოთ ჩვენ შევეცდებით ψ გენერატორის სხვადასხვა შემთხვევისათვის (3.5)-დან დავინახოთ φ_N ფუნქციის სახე და დავადგინოთ მთვლელი განაწილებების რომელ კლასებიდანაა შესაბამისი ალბათობები.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა მაწარმოებელი ფუნქციის გენერატორი ემთხვევა მაწარმოებელ ფუნქციას:

$$\psi(t) = \varphi_N(t) \qquad (3.6)$$

მაშინ (3.5) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მიგვიყვანს (2.7) გამოსახულებამდე, ანუ $\varphi_N(t)$ გამოვა Panjer-ის კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია. ბუნებრივია დავსვათ ასეთი კითხვა: ხომ არ არსებობს კიდევ ისეთი გენერატორები, გარდა (3.6) შემთხვევისა, რომ (3.5) ინტეგრალური განტოლების ამონახსენი გვაძლევდეს Panjer-ის კლასის შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას ? (მაგალითად $\psi(t) = \varphi_N^2(t)$)

თეორემა 2. იმისათვის, რომ $\varphi_N(t)$ იყოს Panjer-ის განაწილებათა კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი c_1 და c_2 მუდმივებისათვის, $\psi(t)$-ს ჰქონდეს შემდეგი ფორმა :

$$\psi(t) = c_1 \cdot \varphi_N(t) + c_2 t \cdot \varphi_N'(t) \qquad (3.7)$$

დამტკიცება : გადავწეროთ (3.5) შემდეგი ფორმით:

$$(1 - at) \cdot \varphi_N'(t) = a \cdot \varphi_N(t) + b \cdot \psi(t) \qquad (3.8)$$

გავაწარმოოთ ამ გამოსახულების ორივე მხარე n-ჯერ:

$$(1 - at) \cdot \varphi_N^{(n+1)}(t) - na \cdot \varphi_N^{(n)}(t) = a \cdot \varphi_N^{(n)}(t) + b \cdot \psi^{(n)}(t)$$

$$\varphi_N^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1) \cdot a}{1 - at} \cdot \varphi_N^{(n)}(t) = \frac{b}{1 - at} \cdot \psi^{(n)}(t)$$

$$\frac{\varphi_N^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} - \frac{a}{1 - at} \cdot \frac{\varphi_N^{(n)}(t)}{n!} = \frac{b}{1 - at} \cdot \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} \cdot \frac{1}{n+1}$$

ჩავსვათ უკანასკნელ გამოსახულებაში $t=0$. მაშინ

$$p_{n+1}-ap_n=\frac{b}{n+1}\cdot q_n ,$$

ანუ

$$p_{n+1}=\left(a+\frac{b}{n+1}\cdot\frac{q_n}{p_n}\right)\cdot p_n \tag{3.9}$$

ცხადია, იმისათვის, რომ (3.9) რეკურენტული ტოლობა იყოს Panjer-ის კლასიდან, აუცილებელია და საკმარისია, რომ ყოველი $k\ge 1$- თვის შესრულდეს ტოლობა:

$$\frac{q_n}{p_n}=c_1^*+c_2\cdot(n+1)\ ,\quad \forall c_1^*,c_2\in\mathrm{R}$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{n=0}^{\infty}q_n\cdot t^n=c_1^*\cdot\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cdot t^n+c_2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cdot t^{n+1}\right)'=c_1\cdot\varphi_N(t)+c_2\cdot\left(t\cdot\varphi_N(t)\right)'$$

საიდანაც

$$\psi(t)=(c_1^*+c_2)\cdot\varphi_N(t)+c_2t\cdot\varphi_N'(t)\equiv c_1\cdot\varphi_N(t)+c_2t\cdot\varphi_N'(t).$$

რ.დ.გ.

საინტერესოა, როგორი $\psi(t)$-სათვის იქნება $\varphi_N(t)$ Sundt-ის კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია და როგორი იქნება თვითონ $\varphi_N(t)$-ს ცხადი სახე ?

თეორემა 3. იმისათვის, რომ $\varphi_N(t)$ იყოს Sundt-ის განაწილებათა კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\psi(t)$ მოცემული იყოს შემდეგი სახით:

$$\psi(t)=P_{k-1}(t)\cdot\varphi_N(t)+Q_{k-1}(t)\cdot t\cdot\varphi_N'(t) \tag{3.10}$$

სადაც $P_{k-1}(t)$ და $Q_{k-1}(t)$ წარმოადგენენ t-ს $(k-1)$-ური რიგის პოლინომებს. $\varphi_N(t)$-ს ცხადი სახე კი ჩაიწერება ასე:

$$\varphi_N(t)=\exp\left(\int_t^1\frac{a+b\cdot P_{k-1}(s)}{1-s\cdot\left(a+b\cdot Q_{k-1}(s)\right)}ds\right) \tag{3.11}$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით Sundt-ის კლასის შესაბამისი ალბათობათა რეკურენტული ფორმულა შემდეგი სახისაა:

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n+1}\right)\cdot p_{n+1-i} \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n+1}\right)\cdot \frac{p_{n+1-i}}{p_n}\right)\cdot p_n$$

ე.ი. იმისათვის, რომ (3.9) იყოს Sundt-ის რეკურენტული ტოლობა, აუცილებელია:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n+1}\right)\cdot \frac{p_{n+1-i}}{p_n} = a + \frac{bq_n}{p_n\cdot(n+1)}$$

$$\frac{1}{b}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(a_i\cdot(n+1)+b_i\right)\cdot p_{n+1-i} - \frac{a}{b}p_n\cdot(n+1) = q_n$$

$$c_1 \equiv \frac{1}{b}\cdot(a_1 - a)\,; \quad c_i \equiv \frac{1}{b}a_i\,,\ \ i>1; \quad d_i \equiv \frac{b_i}{b}\,, \quad i\ge 1.$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(c_i\cdot(n+1)+d_i\right)\cdot t^n\cdot p_{n+1-i} = q_n\cdot t^n$$

ავჯამოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე და დავიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$\sum_{i=1}^{k}\left(c_i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot t^n\cdot p_{n+1-i} + d_i t^{i-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1-i}\cdot p_{n+1-i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}q_n\cdot t^n$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(c_i\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}\cdot p_{n+1-i}\right)_t^{/} + d_i t^{i-1}\cdot\varphi_N(t)\right) = \psi(t)$$

$$\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot\left(t^i\cdot\sum_{i=1}^{k}t^{n+1-i}\cdot p_{n+1-i}\right)_t^{/} + \varphi_N(t)\cdot\sum_{i=1}^{k}d_i t^{i-1} = \psi(t)$$

$$\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot\left(i\cdot t^{i-1}\cdot\varphi_N(t) + t^i\cdot\varphi_N'(t)\right) + \varphi_N(t)\cdot\sum_{i=1}^{k}d_i t^{i-1} = \psi(t)$$

$$\varphi_N(t)\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(ic_i + d_i\right)\cdot t^{i-1} + t\cdot\varphi_N'(t)\cdot\sum_{i=1}^{k}c_i t^{i-1} = \psi(t)$$

საბოლოოდ

$$\psi(t) = P_{k-1}(t)\cdot\varphi_N(t) + Q_{k-1}(t)\cdot t\cdot\varphi_N'(t) \tag{3.12}$$

სადაც

$$P_{k-1}(t) = \frac{1}{b}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(ia_i + b_i\right)\cdot t^{i-1} - \frac{a}{b} \tag{3.13}$$

$$Q_{k-1}(t) = \frac{1}{b}\cdot\sum_{i=1}^{k}a_i t^{i-1} - \frac{a}{b} \tag{3.14}$$

t-ს $(k-1)$-ური რიგის პოლინომებია.

(3.12)-დან ჩვენ შევიძლია დავწეროთ Sundt-ის განაწილებათა კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქციის ცხადი სახე. ჩავსვათ მიღებული (3.12) გამოსახულება (3.5)-ში და ამოვხსნათ $\varphi_N(t)$-ს მიმართ:

$$\frac{\varphi_N'(t)}{\varphi_N(t)} = \left(\ln \varphi_N(t)\right)' = \frac{a + b \cdot P_{k-1}(t)}{1 - t \cdot \left(a + b \cdot Q_{k-1}(t)\right)} \Rightarrow$$

$$\varphi_N(t) = \exp\left(\int_t^1 \frac{a + b \cdot P_{k-1}(s)}{1 - s \cdot \left(a + b \cdot Q_{k-1}(s)\right)} ds \right) \tag{3.15}$$

ამ გამოსახულების კერძო შემთხვევაში, როცა $k = 1$, გვექნება Panjer-ის, ხოლო როცა $k = 2$ Schroter-ის მაწარმოებელი ფუნქცია. რ.დ.გ.

ახლა დავინტერესდეთ Ramsay-ს განაწილებათა კლასით (იხ. II თავი). როგორც ვიცით, იგი განიმარტება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობით:

$$p_n = \left(a + \frac{b \cdot (1 - e^{-\delta})}{e^{n\delta} - 1} \right) \cdot p_{n-1} \tag{3.16}$$

იმისათვის, რომ ეს ტოლობა იყოს (3.9) სახის, საჭიროა, რომ:

$$\frac{q_n}{(n+1) \cdot p_n} = \frac{1}{a(t,\delta)} = \frac{1 - e^{-\delta}}{e^{n\delta} - 1}$$

$$q_n \cdot e^{n\delta} - q_n = (1 - e^{-\delta}) \cdot n \cdot p_n + (1 - e^{-\delta}) \cdot p_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot (te^{\delta})^n - \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot t^n = (1 - e^{-\delta}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} np_n \cdot t^n + (1 - e^{-\delta}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot t^n$$

თუ Ramsay-ის განაწილებათა კლასის შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას აღვნიშნავთ $\varphi_N(t; a, b, \delta)$ სიმბოლოთი, მაშინ

$$\psi(te^{\delta}) - \psi(t) = (1 - e^{-\delta}) \cdot t \cdot \varphi_N'(t; a, b, \delta) + (1 - e^{-\delta}) \cdot \varphi_N(t; a, b, \delta)$$

განვსაზღვროთ $\psi(t \cdot e^{\delta})$ და $\psi(t)$ (3.5) ტოლობიდან და ჩავსვათ უკანასკნელ გამოსახულებაში

$$\frac{1 - ate^{\delta}}{b} \cdot \varphi_N'(te^{\delta}; a, b, \delta) - \frac{ae^{\delta}}{b} \cdot \varphi_N(te^{\delta}; a, b, \delta) - \left(\frac{1 - at}{b} \cdot \varphi_N'(t; a, b, \delta) - \frac{a}{b} \cdot \varphi_N(t; a, b, \delta) \right) =$$
$$= (1 - e^{-\delta}) \cdot t \cdot \varphi_N'(t; a, b, \delta) + (1 - e^{-\delta}) \cdot \varphi_N(t; a, b, \delta)$$

$$e^{\delta} \cdot (1 - ate^{\delta}) \cdot \varphi_N'(te^{\delta}; a, b, \delta) - ae^{\delta} \cdot \varphi_N(te^{\delta}; a, b, \delta) =$$
$$= \left(1 - at + bt \cdot (1 - e^{-\delta})\right) \cdot \varphi_N'(t; a, b, \delta) + \left(-a + b \cdot (1 - e^{-\delta})\right) \cdot \varphi_N(t; a, b, \delta)$$

$$\left((1-ate^{\delta})\cdot\varphi_N(te^{\delta};a,b,\delta)\right)_t^{/} = \left((1-at+bt\cdot(1-e^{-\delta}))\cdot\varphi_N(t;a,b,\delta)\right)_t^{/},$$

$$\varphi_N(te^{\delta};a,b,\delta) = \frac{1-at+bt\cdot(1-e^{-\delta})}{1-ate^{\delta}}\cdot\varphi_N(t;a,b,\delta). \qquad (3.17)$$

მაშასადამე, Ramsay-ის კლასის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს (3.17) განტოლებას. როგორც უკვე აღვნიშნეთ II თავში, Ramsay-ის კლასის კერძო შემთხვევას, როცა $\delta = 0$, წარმოადგენს Panjer-ის კლასი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (3.17) განტოლების ამონახსნის შესახებ ჩვენ ვიცით, რომ

$$\varphi_N(t;a,b,0) = \left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{\frac{a+b}{a}} = \varphi_N(t;a,b). \qquad (3.18)$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა $a = b$. ამ შემთხვევაში (3.16) ასეთ სახეს მიიღებს

$$p_n = ae^{-\delta}\cdot\left(\frac{e^{(n+1)\cdot\delta}-1}{e^{n\delta}-1}\right)\cdot p_{n-1}. \qquad (3.19)$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ ალბათობათა ცხად სახეებს

$$p_n = p_0\cdot a^n\cdot\frac{1-e^{-(k+1)\cdot\delta}}{1-e^{-\delta}} \qquad (3.20)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (3.19) განაწილების შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას ასეთი სახე აქვს

$$\varphi_N(t;a,a,\delta) = \frac{1-a}{1-at}\cdot\frac{1-a_{\delta}}{1-a_{\delta}t} \qquad (3.21)$$

სადაც

$$a_{\delta} \equiv a\cdot e^{-\delta} \qquad (3.22)$$

მართლაც, თუ (3.21)-ს ჩავსვავთ (3.17)განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\varphi_N(te^{\delta};a,b,\delta) = \frac{1-ate^{-\delta}}{1-ate^{\delta}}\cdot\varphi_N(t;a,a,\delta) = \frac{1-ate^{-\delta}}{1-ate^{\delta}}\cdot\frac{1-a}{1-at}\cdot\frac{1-ae^{-\delta}}{1-ate^{-\delta}} =$$
$$= \frac{1-a}{1-a\cdot(te^{\delta})}\cdot\frac{1-ae^{-\delta}}{1-ae^{-\delta}\cdot(te^{\delta})}$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ როცა $b = 0$ (3.16) რეკურენტული თანადობა ასეთ სახეს ღებულობს:

$$p_n = a\cdot p_{n-1}, \qquad (3.23)$$

რაც გეომეტრიულ განაწილებას იძლევა და მაშასადამე, შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას ასეთი სახე აქვს:

$$\varphi_N(t;a,0,\delta)=\frac{1-a}{1-at}\,. \qquad (3.24)$$

მაშასადამე, საბოლოოდ დავასკვნით, რომ

$$\varphi_N(te^{\delta};a,b,\delta)=\varphi_N(t;a,b,\delta)\cdot\frac{1-at+bt\cdot(1-e^{-\delta})}{1-ate^{\delta}}$$

განტოლების $\varphi(t;a,b,\delta)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს:

$$\varphi_N(t;a,b,0)=\left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{\frac{a+b}{a}} \quad , \quad \varphi_N(t;a,a,\delta)=\frac{1-a}{1-at}\cdot\frac{1-a_{\delta}}{1-a_{\delta}t}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი ტოლობა სხვა კუთხითაც არის საინტერესო. როგორც (3.21) და (3.23)-დან ვხედავთ, როცა $a=b$, ანუ როცა p_n ალბათობებისათვის სრულდება (3.19) რეკურენტული თანადობა, შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია წარმოადგენს გეომეტრიული მაწარმოებელი ფუნქციების ნამრავლს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში Ramsay-ის N შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დამოუკიდებელი გეომეტრიული განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეების (პირობითად N_1-ისა და N_2-ის) ჯამს (რომელთა პარამეტრებია a და a_{δ}). ეს კი, თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, N წარმოადგენს Sundt-ის $R_2[a;0]$ კლასის შემთხვევით სიდიდეს (იხ. [სანდტი], თეორემა 4), ანუ გარკვეული a_1 და a_2-სათვის (სწორედ აქედან მოდის $a=(a_1,a_2)$ აღნიშვნა) ადგილი აქვს (3.19) ალბათობათა შემდეგ წარმოდგენას:

$$p_n=a_1\cdot p_{n-1}+a_2\cdot p_{n-2}\,. \qquad (3.25)$$

მართლაც, ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი მუდმივებია: $a_1=a+a_{\delta}$ და $a_2=-a\cdot a_{\delta}$. შევნიშნოთ ასევე, რომ (3.21)-დან

$$p_0=\varphi_N(0)=(1-a)\cdot(1-a_{\delta}) \qquad (3.26)$$

და მაშასადამე (3.20) ალბათობები საბოლოოდ ასე გამოიყურება:

$$p_n=a^n\cdot(1-a)\cdot(1-a_{\delta})\cdot\frac{1-e^{-(n+1)\cdot\delta}}{1-e^{-\delta}}\,. \qquad (3.27)$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $\delta = 0$, შესაკრებები N_1 და N_2 ერთნაირად არის განაწილებული და მაშასადამე, Ramsay-ის შემთხვევით სიდიდეს აღმოაჩნდება უარყოფითი ბინომური განაწილება, პარამეტრით $M = 2$.

დავუშვათ, რომ $\psi(t)$ მაწარმოებელ ფუნქციათა გენერატორი წარმოდგება $\varphi_N(t)$-ს რაიმე ფუნქციის სახით. ანუ

$$\psi(t) = g(\varphi_N(t)) \tag{3.28}$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში (3.5) წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას $\varphi_N(t)$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამონახსენიც დამოკიდებულია g-ზე. ამიტომ მას ჩვენ $\varphi_N(t;g)$-თი აღვნიშნავთ. მოხერხებულია (3.5) განტოლება გადაიწეროს ასეთი განცალებად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლების ფორმით

$$(1-at)\cdot\varphi_N(t;g) - a\cdot\varphi_N(t;g) = b\cdot g(\varphi_N(t;g))$$

რომლის ზოგად ინტეგრალს აქვს სახე:

$$\int_{\varphi_N(t;g)}^{1} \frac{du}{au + b\cdot g(u)} = -\frac{1}{a}\cdot\ln(1-at) + c$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi_N(1) = 1$, ვპოულობთ c კოეფიციენტს:

$$\frac{1}{a}\cdot\ln(1-a\cdot 1) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{a}\cdot\ln(1-a)$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნს $\varphi_N(1) = 1$ საწყისი პირობით ექნება ასეთი სახე:

$$\int_{\varphi_N(t;g)}^{1} \frac{du}{au + b\cdot g(u)} = -\frac{1}{a}\cdot\ln\left(\frac{1-a}{1-at}\right) \tag{3.29}$$

მოსახერხებელია (3.29) ტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$\exp\left[-\int_{\varphi_N(t;g)}^{1} \frac{a+b}{au + b\cdot g(u)}\,du\right] = \varphi_N(t;a,b) \tag{3.30}$$

სადაც $\varphi_N(t;a,b)$ არის Panjer-ის განაწილების შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია. უკანასკნელ ინტეგრალურ განტოლებაში სხვადასხვა g ფუნქციის ჩასმით და შემდეგ მის ამოხსნით, მივიღებთ შესაბამის $\varphi_N(t)$ ფუნქციას.

განვიხილოთ $g(x)=x^k$; $k \neq 1$, ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ანუ

$$\psi(t)=\varphi_N^k(t). \tag{3.31}$$

აღვნიშნოთ ასეთი გენერატორის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია $\varphi_{N,k}(t)$ სიმბოლოთი. მაშინ (3.5)-დან გვექნება:

$$\left((1-at)\cdot\varphi_{N,k}(t)\right)' = b\cdot\varphi_{N,k}^k(t)$$

$$\varphi'_{N,k}(t)-\frac{a}{1-at}\cdot\varphi_{N,k}(t)=\frac{b}{1-at}\cdot\varphi_{N,k}^k(t)$$

მივიღეთ ბერნულის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც შეიძლება შემდეგი გარდაქმნით დავიყვანოთ ასეთ სახემდე

$$-\frac{a}{1-at}\equiv p(t), \quad \frac{b}{1-at}\equiv q(t) \tag{3.32}$$

$$\frac{1-k}{1-k}\cdot\frac{\varphi'_{N,k}(t)}{\varphi_{N,k}^k(t)}+\frac{\varphi_{N,k}(t)}{\varphi_{N,k}^k(t)}\cdot p(t)=q(t)$$

$$\varphi_{N,k}^{-(k-1)}(t)\equiv z \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{1-k}\cdot z'+z\cdot p(t)=q(t).$$

მივიღეთ წრფივი, არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. როგორც ცნობილია, მისი ზოგადი ამოხსნა ასეთი სახისაა

$$z=e^{(k-1)\cdot\int p(t)dt}\cdot\left(c-(k-1)\cdot\int q(t)\cdot e^{-(k-1)\cdot\int p(t)dt}dt\right) \tag{3.34}$$

შევიტანოთ ამ გამოსახულებაში $p(t)$ და $q(t)$-ს მნიშვნელობები (3.32)-დან:

$$z=(1-at)^{k-1}\cdot\left(c-(k-1)\cdot\frac{-b}{a}\cdot\frac{(1-at)^{-(k-1)}}{-(k-1)}\right)=c\cdot(1-at)^{k-1}-\frac{b}{a}$$

დავუბრუნდეთ ისევ $\varphi_{N,k}(t)$-ებს

$$\varphi_{N,k}(t)=\left(c\cdot(1-at)^{k-1}-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\varphi_{N,k}(1)=1$, მაშინ:

$$c=\frac{a+b}{a\cdot(1-a)^{k-1}}$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi_{N.k}(t)=\left(\frac{a+b}{a}\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{k-1}-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \tag{3.35}$$

ჩვენ მივიღებდით იგივე გამოსახულებას, $\psi(t)=\varphi_N^k(t)$ რომ ჩაგვესვა ზოგად (3.29) გამოსახულებაში.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. (3.35) მაწარმოებელ ფუნქციას შეესაბამება ალბათობათა Sundt-ის რეკურსია. კერძოდ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$p_{k,n}=\frac{a+b}{a+b-b\cdot(1-a)^{k-1}}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\cdot\left(1-\frac{j}{n}\cdot\frac{k-2}{k-1}\right)\cdot C_{k-1}^{j}\cdot a^{j}\cdot p_{k,n-j} \tag{3.36}$$

დამტკიცება. (3.35)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\varphi'_{N,k}(t)=\frac{a+b}{1-a}\cdot\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{k-2}\cdot\left(\frac{a+b}{a}\cdot\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{k-1}-\frac{b}{a}\right)^{-1}\cdot\varphi_{N,k}(t)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\varphi'_{N,k}(t)\cdot\left((a+b)\cdot(1-at)^{k-1}-b\cdot(1-a)^{k-1}\right)=a\cdot(a+b)\cdot(1-at)^{k-2}\cdot\varphi_{N,k}(t)\,.$$

ლაიბნიცის ფორმულის გამუყენებით გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე მხარე m-ჯერ. მივიღებთ

$$\sum_{j=0}^{m}C_m^j\cdot\varphi_{N,k}^{(j+1)}(t)\cdot\left((a+b)\cdot(1-at)^{k-1}-b\cdot(1-a)^{k-1}\right)^{(m-j)}=$$
$$=a\cdot(a+b)\cdot\sum_{j=0}^{m}C_m^j\cdot\varphi_{N,k}^{(j)}(t)\cdot\left((1-at)^{k-2}\right)^{(m-j)}$$

ამოვხსნათ უმაღლესი რიგის წარმოებულიანი წევრი:

$$\varphi_{N,k}^{(m+1)}(t)=\frac{a\cdot(a+b)}{(a+b)\cdot(1-at)^{k-1}-b\cdot(1-a)^{k-1}}\times$$
$$\times\left(\varphi_{N,k}(t)\cdot\left((1-at)^{k-2}\right)^{(m)}+\sum_{j=1}^{m}\left(C_m^j+(k-1)\cdot C_m^{j-1}\right)\cdot\varphi_{N,k}^{(j)}(t)\cdot\left((1-at)^{k-2}\right)^{(m-j)}\right) \tag{3.37}$$

რადგან

$$\left((1-at)^{k-2}\right)^{(r)}=C_{k-2}^{r}\cdot(-a)^{r}\cdot r!\cdot(1-at)^{k-2-r}\cdot I\{r\le k-2\} \tag{3.38}$$

(3.37)-დან მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{N.k}^{(m+1)}(t) = \frac{a \cdot (a+b)}{(a+b)\cdot(1-at)^{k-1} - b\cdot(1-a)^{k-1}} \times$$

$$\times\left(\varphi_{N.k}(t)\cdot(-a)^m \cdot (k-2)! \cdot \frac{(1-at)^{k-2-m}}{(k-2-m)!} \cdot I\{m \le k-2\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=(m-k+2)\vee 1}^{m} C_m^j \cdot \left((k-2)! + (k-1)! \cdot j/(m-j+1)\right) \cdot \varphi_{N.k}^{(j)}(t) \cdot (-a)^{m-j} \cdot \frac{(1-at)^{k-2-m+j}}{(k-2-m+j)!} \right),$$

საიდანაც გამარტივების შემდეგ დავასკვნით, რომ

$$\frac{\varphi_{N.k}^{(n)}(t)}{n!} = \frac{1}{1 - \frac{b}{a+b}\cdot\left(\frac{1-a}{1-at}\right)^{k-1}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n\wedge(k-1)} (-1)^{j-1} \cdot \left(1 - \frac{j}{n}\cdot\frac{k-2}{k-1}\right) \cdot C_{k-1}^j \cdot \left(\frac{a}{1-at}\right)^j \cdot \frac{\varphi_{N.k}^{(n-j)}(t)}{(n-j)!} \qquad (3.39)$$

საბოლოოდ, როცა $t = 0$, (3.39)-დან მივიღებთ

$$p_{k,n} = \frac{a+b}{a+b-b\cdot(1-a)^{k-1}} \cdot \sum_{j=1}^{n\wedge(k-1)} (-1)^{j-1} \cdot \left(1 - \frac{j}{n}\cdot\frac{k-2}{k-1}\right) \cdot C_{k-1}^j \cdot a^j \cdot p_{k,n-j}\ . \qquad (3.40)$$

ცხადია, თუ დავუშვებთ, რომ $p_{k,n} \equiv 0$, როცა $n < 0$, (3.40) შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ

$$p_{k,n} = \frac{a+b}{a+b-b\cdot(1-a)^{k-1}} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \cdot \left(1 - \frac{j}{n}\cdot\frac{k-2}{k-1}\right) \cdot C_{k-1}^j \cdot a^j \cdot p_{k,n-j} \qquad (3.41)$$

რაც სწორედ დასამტკიცებელ ტოლობას წარმოადგენს.

შევნიშნოთ, რომ $k = 2$ შემთხვევაში, როცა $n \ge 1$, (3.41)-დან ვღებულობთ

$$p_{2,n} = \frac{a+b}{a+b-b\cdot(1-a)} \cdot \sum_{j=1}^{1} (-1)^{j-1} \cdot C_1^j \cdot a^j \cdot p_{2,n-j} = \frac{a+b}{1+b} \cdot p_{2,n-1} = a^* \cdot p_{2,n-1}, \qquad (3.42)$$

ანუ ვღებულობთ გეომეტრიული განაწილების შემთხვევას.

განვიხილოთ ახლა $k = 3$ შემთხვევა. ამ შემთხვევაში, (3.41)-ის წევრები იანგარიშება სხვადასხვა წესით იმის მიხედვით, $n \ge 2$, თუ $n < 2$. ამიტომ (3.41)-დან მივიღებთ

$$p_{3,n} = \frac{a+b}{a+b-b\cdot(1-a)^2} \cdot \sum_{j=1}^{n\wedge 2} (-1)^{j-1} \cdot C_2^j \cdot a^j \cdot \left(1 - \frac{j}{n}\cdot\frac{1}{2}\right) \cdot p_{3,n-j}\ , \qquad (3.43)$$

საიდანაც

$$p_{3,1} = \frac{a+b}{a\cdot(1+2b-b\cdot a)} \cdot \sum_{j=1}^{1} (-1)^{j-1} \cdot C_2^j \cdot a^j \cdot \left(1 - \frac{j}{2}\right) \cdot p_{3,1-j} = \frac{a+b}{1+2b-ba} \cdot p_{3,0} = \frac{a^*}{1+b\cdot a^*} \cdot p_{3,0}\ ,$$

ხოლო როცა $n \geq 2$, (3.43)-დან გვაქვს

$$p_{3,n} = \frac{a^*}{1 + b \cdot a^*} \cdot \left((2 - 1/n) \cdot p_{3,n-1} - (a - a/n) \cdot p_{3,n-2} \right) \qquad (3.44)$$

და როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს Sundt-ის ორ ნაბიჯიან რეკურსიასთან.

საზოგადოდ, ყოველი ფიქსირებული $k \geq 3$-სათვის (3.40)-დან გვაქვს, რომ სანამ $n \leq k - 1$

$$p_{k,n} = \frac{a + b}{a + b - b \cdot (1 - a)^{k-1}} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot C_{k-1}^{j} \cdot a^{j} \cdot \left(1 - \frac{j}{n} \cdot \frac{k - 2}{k - 1} \right) \cdot p_{k,n-j}\ , \qquad (3.45)$$

ხოლო დაწყებული k-დან, ანუ როცა $n \geq k$, ალბათობათა გადათვლის წესი ასეთია:

$$p_{k,n} = \frac{a + b}{a + b - b \cdot (1 - a)^{k-1}} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \cdot C_{k-1}^{j} \cdot a^{j} \cdot \left(1 - \frac{j}{n} \cdot \frac{k - 2}{k - 1} \right) \cdot p_{k,n-j}\ , \qquad (3.46)$$

რაც Sundt-ის $k - 1$ ნაბიჯიან რეკურსიას წარმოადგენს, რამდენადაც შესაძლებელია (3.45) და (3.46)-ის ერთიანი ასეთი ჩანაწერის გაკეთება:

$$p_{k,n} = \frac{a + b}{a + b - b \cdot (1 - a)^{k-1}} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \cdot C_{k-1}^{j} \cdot a^{j} \cdot \left(1 - \frac{j}{n} \cdot \frac{k - 2}{k - 1} \right) \cdot p_{k,n-j}\ , \qquad (3.47)$$

სადაც $p_{k,n} \equiv 0$, როცა $n < 0$.

(3.35)-ის კერძო შემთხვევაში, როცა $b = 0$, $\varphi_{N,k}(t) = \dfrac{1 - a}{1 - at}$ ყოველი k-სათვის, რაც გეომეტრიული განაწილების შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქციაა. აღსანიშნავია, რომ გეომეტრიულ განაწილებას მივიღებთ იმ კერძო შემთხვევაშიც, როცა $k = 2$. მართლაც

$$\varphi_{N,2}(t) = \left(\frac{a + b}{a - 1} \cdot \frac{at - 1}{a} - \frac{b}{a} \right)^{-1} = \frac{1 - \dfrac{a + b}{1 + b}}{1 - \dfrac{a + b}{1 + b} \cdot t} = \left| \frac{a + b}{1 + b} \equiv a^* \right| = \frac{1 - a^*}{1 - a^* t} \qquad (3.48)$$

საინტერესოა მუდმივი გენერატორის, ანუ $\psi(t) = c$ შემთხვევის ცალკე განხილვა, რომელიც წარმოადგენს ჩვენს მიერ განხილულ (3.31)-ის კერძო შემთხვევას როცა $k = 0$. (3.5)-დან გვექნება:

$$\varphi_N(t) = \frac{1 - a - bc + bct}{1 - at} \qquad (3.49)$$

ამ შემთხვევაში $0 \le p_0 = \varphi_N(0) = 1 - a - bc \le 1$ პირობა ექვივალენტურია $0 \le a + bc \le 1$ პირობისა, რაც გარკვეულად ზღუდავს მუდმივების კლასს, რომლებიც შეიძლება გამოდგეს გენერატორად. გარდა ამისა, (3.49)-დან ყოველი $n \ge 1$-თვის გვექნება:

$$\varphi_N^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \cdot \left(1 - a - bc + bct\right)^{(j)} \cdot \left((1-at)^{-1}\right)^{(n-j)} =$$
$$= a^{n-1} \cdot n! \cdot (1-at)^{-n-1} \cdot \left(a \cdot (1 - a - bc + bct) + bc \cdot (1-at)\right)$$

$$\frac{\varphi_N^{(n)}(t)}{n!} = a^{n-1} \cdot (1-at)^{-n-1} \cdot (ap_0 + bc)$$

ამრიგად,

$$p_n = \frac{\varphi_N^{(n)}(0)}{n!} = a^{n-1} \cdot (1-a) \cdot (1-p_0) \tag{3.50}$$

როგორც ვხედავთ, (3.50)-ით მოცემული ალბათობები აკმაყოფილებენ იმავე Panjer-ის რეკურენტულ თანაფარდობას (გეომეტრიული განაწილებისათვის), მაგრამ დაწყებული $n = 2$ და არა $n = 1$-დან:

$$p_n = a \cdot p_{n-1}, n \ge 2 \tag{3.51}$$

და ამდენად (3.51) სახით მოცემული ალბათობები არ ეკუთვნიან Panjer-ის კლასს, როგორც ეს ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს.

(3.51)-ით მოცემულ განაწილებას, შეიძლება ეწოდოს ‘‘დაგვიანებული’’ გეომეტრიული განაწილება. ასეთი განაწილება ბუნებრივად აქვს ცდების რაოდენობას პირველ წარმატებამდე ასეთ კომბინირებულ სქემაში: თუ მოხდება რაღაც A ხდომილობა (რომლის ალბათობა $1 - p_0$-ის ტოლია), მაშინ იწყება მისგან დამოუკიდებელი ბერნულის ცდათა სქემის გათამაშება პირველ წარმატებამდე (რომლის ალბათობა თითოეულ ცდაში $1 - a$-ს ტოლია), თუ არა და –არა.

სადაზღვევო შემთხვევათა რაოდენობის კიდევ ერთ ნიშვნელოვან ალბათურ მოდელს წარმოადგენს ე.წ. შერეული პუასონის განაწილება. საინტერესოა ალბათობათა ცნობილი კლასებიდან რომელს შეიძლება მიეკუთვნებოდეს ის. განაწილებათა ეს კლასი ასე მოიცემა:

$$p_n = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} dH(\lambda) \tag{3.52}$$

სადაც $H(\lambda)$ შემრევი (ან სტრუქტურული) ფუნქცია არის რაიმე განაწილების ფუნქცია $h(\lambda)$ სიმკვრივით. ამ შემთხვევაში, N-ის მაწარმოებელი ფუნქცია იქნება:

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot t^n = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} dH(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda} dH(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\cdot(1-t)} dH(\lambda)\,. \quad (3.53)$$

გასაგებია, რომ იმის და მიხედვით, თუ როგორია $H(\lambda)$ ფუნქცია, (3.52) ალბათობები შეიძლება ეკუთვნოდეს სულ სხვადასხვა კლასებს. განვიხილოთ მაგალითები.

<u>მაგალითი 1.</u> ვთქვათ,

$$H(\lambda) = 2\Phi(\lambda) - 1 \;\; , \;\; h(\lambda) = 2\cdot\varphi(\lambda) \quad (3.54)$$

სადაც $\Phi(\lambda)$ და $\varphi(\lambda)$ არის შესაბამისად სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე. ამ დაშვების საფუძველზე (3.52)-დან გვექნება

$$p_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \;\; \Rightarrow \;\; \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\int_0^{\infty} \lambda^n \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda}{\int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(-e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)' d\lambda}{\int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)\cdot \int_0^{\infty} \lambda^{n-2} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda - \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda}{\int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\dfrac{\int_0^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda}{(n-1)\cdot \int_0^{\infty} \lambda^{n-2} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda}} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{1}{n}$$

საბოლოოდ,

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot p_{n-2} - \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} \quad (3.55)$$

და როგორც ვხედავთ, მივიღეთ Sundt-ის კლასის შესაბამისი ალბათობათა რეკურენტული ფორმულის ის კერძო შემთხვევა (Schroter), როცა

$$k = 2, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 1\,, \quad (3.56)$$

(იხ. § 2). ბოლოს, განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც წინას განზოგადებაა.

<u>მაგალითი 2.</u> ვთქვათ, $H(\lambda)$-ს შესაბამისი სიმკვრივე მოიცემა ასეთნაირად:

$$h_k(\lambda) \equiv c_k^* \cdot \lambda^k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \tag{3.57}$$

სადაც

$$\int_0^\infty h_k(\lambda) d\lambda = c_k^* \cdot \int_0^\infty \lambda^k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 1 \Rightarrow c_k = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}. \tag{3.58}$$

შევნიშნოთ, რომ $k = 0$ -სათვის ვღებულობთ წინა მაგალითის შემთხვევას, ანუ (3.57) მართლაც წარმოადგენს მის განზოგადებას. (3.57)-ის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია იქნება:

$$\varphi_N(t) = c_k^* \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda\cdot(1-t)} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \equiv {}_k\varphi_N(t) \tag{3.59}$$

$${}_0\varphi_N(t) = c_0^* \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda\cdot(1-t)} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \equiv \frac{\mathrm{M}(1-t)}{\mathrm{M}(0)} \quad , \tag{3.60}$$

სადაც $\mathrm{M}(x) = \dfrac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}$ წარმოადგენს ე.წ. მილსის შეფარდებას.

$$\left({}_0\varphi_N(t)\right)^{(k)} = c_0^* \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda\cdot(1-t)} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (3.59)-ში. მივიღებთ:

$${}_k\varphi_N(t) = c_0^* \cdot c_k^* \cdot {}_0\varphi_N^{(k)}(t) \equiv c_k \cdot {}_0\varphi_N^{(k)}(t) \tag{3.61}$$

რადგან ${}_k\varphi_N(1) = 1$, ამიტომ

$$c_k = \frac{1}{{}_0\varphi_N^{(k)}(1)}$$

$${}_k\varphi_N(t) = \frac{{}_0\varphi_N^{(k)}(t)}{{}_0\varphi_N^{(k)}(1)} \tag{3.62}$$

გამოვიყენოთ მილსის $\mathrm{M}(x)$ ფარდობის თვისება, რომლის მიხედვითაც:

$$\mathrm{M}^{(n)}(x) = x \cdot \mathrm{M}^{(n-1)}(x) + (n-1) \cdot \mathrm{M}^{(n-2)}(x)$$

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ (3.60)-ს, გვექნება

$${}_0\varphi_N(t) = \frac{\mathrm{M}(1-t)}{\mathrm{M}(0)} \qquad \Rightarrow$$

$${}_0\varphi_N^{(n)}(t) = \mathrm{M}(0) \cdot \left(\mathrm{M}(1-t)\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \mathrm{M}(0) \cdot \mathrm{M}^{(n)}(1-t) =$$

$$= (n-1) \cdot {}_0\varphi_N^{(n-2)}(t) - (1-t) \cdot {}_0\varphi_N^{(n-1)}(t) \tag{3.63}$$

თუ გამოვიყენებთ (3.62), მივიღებთ ${}_k\varphi_N(t)$ მაწარმოებელი ფუნქციის შესაბამის ალბათურ განაწილებს:

$$
{}_k p_n \equiv \frac{{}_k\varphi_N^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{{}_0\varphi_N^{(k+n)}(0)}{{}_0\varphi_N^{(k)}(1)} \quad \Rightarrow \tag{3.64}
$$

$$
\frac{{}_k p_n}{{}_k p_{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{{}_0\varphi_N^{(k+n)}(0)}{{}_0\varphi_N^{(k+n-1)}(0)}.
$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში ჩავსვათ (3.63), რის შედეგადაც გვექნება:

$$
\frac{{}_k p_n}{{}_k p_{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(n+k-1)\cdot{}_0\varphi_N^{(n+k-2)}(0) - {}_0\varphi_N^{(n+k-1)}(0)}{{}_0\varphi_N^{(n+k-1)}(0)} =
$$

$$
= \frac{1}{n}\cdot\frac{(n+k-1)\cdot(n-2)!\cdot{}_k p_{n-2}\cdot{}_0\varphi_N^{(k)}(1) - (n-1)!\cdot{}_k p_{n-1}\cdot{}_0\varphi_N^{(k)}(1)}{(n-1)!\cdot{}_k p_{n-1}\cdot{}_0\varphi_N^{(k)}(1)}.
$$

ამოვხსნათ ამ ტოლობიდან ${}_k p_n$:

$$
{}_k p_n = \frac{n+k-1}{n\cdot(n-1)}\cdot{}_k p_{n-2} - \frac{1}{n}\cdot{}_k p_{n-1} \tag{3.65}
$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ Wang-Sobrero-ს განაწილებათა კლასის კერძო შემთხვევა. (3.65) რეკურენტული ტოლობის შესაბამის მაწარმოებელ ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$
{}_k\varphi_N(t) = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\cdot\int_0^\infty \lambda^k\cdot e^{-\lambda\cdot(1-t)}\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda \tag{3.66}
$$

თუ განვიხილავთ (3.65) ფორმულის კერძო შემთხვევას, როცა $k=0$, მივიღებთ იგივე შედეგს, რაც გვქონდა (3.55). ხოლო თუ განვიხილავთ $k=1$ შემთხვევას, მაშინ

$$
p_n = \frac{1}{n-1}\cdot p_{n-2} - \frac{1}{n}\cdot p_{n-1}\ , \tag{3.67}
$$

შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქცია კი იქნება

$$
{}_1\varphi_N(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda\cdot(1-t)}dH_1(\lambda)\ , \tag{3.68}
$$

სადაც $H_1(\lambda) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ არის რელეის განაწილების ფუნქცია. როგორც ვხედავთ, (3.67) სახით მოცემული განაწილებათა კლასი არის არა Sundt-ის კლასის შესაბამისი, მიუხედავად დიდი მსგავსებისა (3.67) და (3.55) ფორმულებს შორის,

არამედ Wang-Sobrero-ს კლასის კერძო შემთხვევა (როცა $k = 2$), ისევე როგორც (3.65) სახით მოცემული რეკურენტული ტოლობა.

ლიტერატურა

[1] Hesselager, O (1994) A recursive procedure for calculation of some compound distributions ASTIN Bulletin 24, No 1, 1994

[2] Panjer, H.H (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions ASTIN Bulletin 12, 22-26

[3] Panjer, H.H and Willmot, G.E (1982) Recursions for compound distributions ASTIN Bulletin 13, 1-11

[4] Ramsay, C.M (1989) On an integral equation for discounted compound Annuity distributions ASTIN Bulletin 19, No 2

[5] Schroter, K.J (1990) On a family of counting distributions and recursions for related compound distributions Scand Actuarial J 1990, 161-174

[6] Sundt, B (1992) On some extensions of Panjer's class of counting distributions ASTIN Bulletin 22, 61-80

[7] Sundt, B and Jewell, W.S (1981) Further results on recursive evaluation of compound distribuions ASTIN Bulletin 12, 27-39

[8] Wang, S and Sobrero, M (1994) Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions ASTIN Bulletin 24, No 2, 1994

[9] Willmot, G (1988) Sundt and Jewell's family of counting discrete distributions ASTIN Bulletin 18, 17-29

[10] სტუ-ს სტუდენტი ზვიად ჭინჭარაულის სადიპლომო ნაშრომი