საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ლეკიშვილი გიორგი გიგლას ძე

“სადაზღვევო პორტფელის ანალიზი და საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა”

სპეციალობა – 01.02.09. გამოყენებითი მათემატიკა

დისერტაცია

მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად

კათედრა: № 104 გამოყენებითი მათემატიკა

ხელმძღვანელი დოც. გ. მირზაშვილი.

თბილისი
2003

დანართი

სარჩევი:

ივეტა რეზოს ასული დოლაკიძის მიერ მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის "გარდამავალ პერიოდში დაფუძნებული საპენსიო სქემის გათვლა"

დახასიათება

ივეტა დოლაკიძის ნაშრომში წარმოდგენილი პრობლემატიკა არის უაღრესად აქტუალური. ჩვენს თვალწინ ხდება საბაზრო პრინციპებზე დაფუძნებული სადაზღვევო ბაზრის განვითარება და არასახელმწიფო საპენსიო უზრუნველყოფის პირველი სქემების ჩამოყალიბება. გარდამავალ პერიოდში მყოფ ქვეყნებში (მათ შორის საქართველოში) ამ პროცესების წარმართვისას გარკვეული პრობლემები ჩნდება. არასახელმწიფო საპენსიო უზრუნველყოფის სქემებთან მიმართებაში ერთ-ერთ ასეთ პრობლემას შედარებით ასაკოვანი ადამიანების საპენსიო უზრუნველყოფა წარმოადგენს. ასაკის გამო ამ ადამიანებს არ რჩებათ იმის დრო, რომ ზომიერი საპენსიო შენატანებით ისეთი დანაგროვი შეიქმნან, რომელიც მათ შედარებით ნორმალური პენსიის მიღების საშუალებას მისცემს.

წარმოდგენილ ნაშრომში ამ პრობლემის გადასაჭრელად ორი მიდგომაა შემოთავაზებული. პირველი იმაში მდგომარეობს, რომ, მაგალითად გარკვეულ საწარმოში, ახალგაზრდებმა ნაწილობრივ დაფარონ ასაკოვანი თანამშრომლების საპენსიო შენატანები. სხვა სიტყვებით ეს მიდგომა გულისხმობს შერეული ტიპის საპენსიო სქემის ჩამოყალიბებას, რომელშიც ფონდირებისა და სოლიდარობის პრინციპები ერთმანეთშია შერწყმული. მეორე მიდგომა (რომელიც პრაქტიკაშიც ხშირად გამოიყენება) ეყრდნობა იმ დაშვებას, რომ საწარმო, ორგანიზაცია თუ ფირმა თავისი სახსრებიდან ფარავს იმ დანაკლისს, რომელიც ასაკოვანი თანამშრომლების დანაგროვში ჩნდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ საპენსიო სქემაში იქმნება დამატებითი ე.წ. საკომპენსაციო ფონდი.

ორივე მიდგომა მოითხოვს მთელი რიგი ამოცანების გადაჭრას, რომელთაგანაც უმთავრესია:

- შენატანების საჭირო სიდიდის დადგენა;
- საკომპენსაციო ფონდის შემთხვევაში მისი ფუნქციონირების ხანგრძლივობის წინასწარი შეფასება.

სადისერტაციო ნაშრომში ორივე მიდგომისთვის შემუშავებულია სათანადო მათემატიკური მოდელები და მათ ფარგლებში გადაჭრილია ჩამოთვლილი ამოცანები. ამისათვის დისერტანტს მოუხდა სადაზღვევო საქმის და განსაკუთრებით სიცოცხლის დაზღვევის აქტუარული მოდელების საფუძვლიანი შესწავლა და რიგი მათემატიკური სირთულეების გადალახვა.

შედეგად, ნაშრომი გამოვიდა შინაარსიანი და საინტერესო. აღსანიშნავია, რომ მისი შედეგების და მეთოდების გამოყენება პრაქტიკაში დღესვე არის შესაძლებელი, რაც უთუოდ მნიშვნელოვანია მითუმეტეს, რომ ეს ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის კათედრაზე.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, მე როგორც ხელმძღვანელს მიზანშეწონილად მიმაჩნია ივეტა რეზოს ასული დოლაკიძის ნაშრომის “გარდამავალ პერიოდში დაფუძნებული საპენსიო სქემის გათვლა” წარდგენა მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად.

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი /გ.მირზაშვილი/

გიორგი გიგლას ძე ლეკიშვილის მიერ მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის "სადაზღვევო პორტფელის ანალიზი და საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა"

დახასიათება

გიორგი ლეკიშვილის ნაშრომში განხილულია სადაზღვევო საქმიანობის ერთ-ერთი ძირითადი ფინანსური ინსტრუმენტი – გადაზღვევა, ანუ პირდაპირი მზღვეველის (ცედენტის) მიერ აღებული რისკების მეორადი გადანაწილება, მათი მეორად სადაზღვეო ბაზარზე განთავსება.

ამ ფინანსური ინსტრუმენტის გამოყენებისას სადაზღვევო კომპანიაში დგება ოპტიმალური გადაზღვევის პროგრამის შემუშავების ამოცანა, რომლის წარმატებით გადაჭრაზე არის დამოკიდებული მისი საბოლოო ფინანსური შედეგი.

წარმოდგენილ ნაშრომში ეს ამოცანა განხილულია ე.წ. პროპორციული გადაზღვევის კერძო შემთხვევაში, როდესაც ყოველი პოლისისთვის მომავალ შესაძლო ზარალში ცედენტის მონაწილეობის წილი ერთი და იგივეა, იმის მიუხედავად, თუ რა სიდიდის იქნება ეს ზარალი.

დასაწყისში დისერტანტი იხილავს წინა წლების მონაცემების ანალიზისა და მათ საფუძველზე რეტროსპექტულად საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის დადგენის ამოცანას. თუ კომპანიას მრავალი წლის მონაცემები გააჩნია, ნაშრომში წარმოდგენილი მეთოდები ფაქტიურად შემდგომი წლისათვის საუკეთესო გადაზღვევის შერჩევის საშუალებასაც იძლევა. აღსანიშნავია, რომ გადაზღვევის ხარისხის დასადგენად გამოიყენება როგორც პორტფელის საბოლოო ფინანსური შედეგი, ასევე ამ შედეგის ე.წ. სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობა. უშუალოდ ფინანსური შედეგის გამოყენება ნიშნავს წრფივი სარგებლიანობის ფუნქციის გამოყენებას.

ნაშრომში ასევე წარმოდგენილია ზარალიანობის სტოქასტური მოდელი, რომლის ფარგლებშიც ხერხდება ისეთი პროპორციული გადაზღვევის დადგენა, რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს ე.წ. გაკოტრების ალბათობას. გაკოტრება აქ პირობითი ცნებაა და უბრალოდ საბოლოო ფინანსური შედეგის გარკვეულ (შესაძლოა, საკმაოდ მაღალ) ზღვარზე დაბლა ჩამოსვლას ნიშნავს.

დასმული ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაჭრელად, ანალიტიკურთან ერთად, დისერტანტი აქტიურად იყენებს კომპიუტერულ მეთოდებს, კერძოდ Exsel-ის ცხრილებს. გარდა საკუთრივ ამოცანის ამოხსნისა, ამგვარი მიდგომა მას გამოყენებისთვის გამზადებული ცხრილების წარმოდგენის საშუელებას აძლევს. ნაშრომში, დანართის

სახით, შევიდა მრავალი ასეთი ცხრილი (და შესაბამისი გრაფიკი), რომლებიც საილუსტრაციო მაგალითებს მოიცავს. ასევე წარმოდგენილია floppy disk , რომელზეც რეალური ამოცანების ამოსახსნელად საჭირო გამზადებული გამოთვლითი პროცედურებია ჩაწერილი.

საბოლოოდ შეიძლება ითქვას, რომ გიორგი გიგლას-ძე ლეკიშვილის სადისერტაციო ნაშრომი საინტერესო და სასარგებლოა და მე, როგორც ხელმძღვანელს მიზანშეწონილად მიმაჩნია მისი წარდგენა მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად.

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი /გ.მირზაშვილი/

ნინო წერეთლის მიერ მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის "მომგებიანობის ტესტირება სიცოცხლის დაზღვევის ზოგად მოდელში"

დახასიათება

ნინო წერეთლის ნაშრომი ეძღვნება აქტუარულ მეცნიერებაში ერთ-ერთ ყველაზე ცნობილ ამოცანას – მომგებიანობის ტესტირებას სიცოცხლის დაზღვევის ბიზნესში.

ცნობილია, რომ სიცოცხლის დაზღვევა ძირითადად გრძელვადიანი ფორმით ხორციელდება და დასაწყისში მზღვეველის აქციონერებისგან მნიშნელოვან ინვესტიციებს მოითხოვს. ამგვარად, მათთვის უაღრესად მნიშვნელოვანია წინასწარ იმის შეფასება, თუ როგორი იქნება მომავალი ფულადი ნაკადები, როდის გახდება ბიზნესი მომგებიანი და რა სიდიდის იქნება მოგება. ასევე მნიშვნელოვანია იმის დადგენა, თუ როგორ უნდა წარიმართოს ბიზნესი (მაგალითად, რა ფასი უნდა დაედოს სადაზღვევო პროდუქტს), რომ ფულადი ნაკადებიც და მოგებაც სასურველი იყოს. მთლიანობაში, ამოცანათა ამ კომპლექსს მომგებიანობის ტესტირების (Profit Testing) პრობლემას უწოდებენ.

წარმოდგენილი ნაშრომის სიახლე იმაში მდგომარეობს, რომ მასში შემუშავებულია ვადიანი სიცოცლის დაზღვევის ზოგადი სტოქასტური მოდელი, რომელიც აერთიანებს სიცოცხლის დაზღვევის ცნობილ კლასიკურ ფორმებს. ამ მოდელის შემუშავებას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ნაშრომში, თუმცა სიახლეთა სია ამით არ ამოიწურება. ზოგად მოდელში ბუნებრივია სადაზღვევო შენატანების (პრემიების) ცვალებადი ნაკადის განხილვა და ასეთ შემთხვევაში კლასიკური ექვივალენტობის პრინციპი აღარ არის საკმარისი პრემიების დასადგენად. ნაშრომში მოყვანილია დამატებითი პირობების რამდენიმე ექვივალენტური ფორმა, რაც ბუნებრივად ანზოგადებს კლასიკურ ექვივალენტობის პრინციპს. ეს პირობები მოიცავს ინფორმაციას მომავალი ფულადი ნაკადების შესახებ და დისერტანტის მიერ მიღებულია ცხადი კავშირები პრემიებსა და ამ ნაკადებს შორის. გარდა ამისა, ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა ზოგადი მოდელის ფარგლებში რეზერვების შექმნის პრობლემას. აქაც მნიშვნელოვან სიახლეს ვხვდებით: ცვლადკოეფიციენტებიანი რეკურენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად მოხერხდა რეზერვების ნაკადის ცალსახად გამოსახვა სასურველი ფულადი ნაკადების მეშვეობით და პირიქით. ამით ეს საკითხი მთლიანად დაიხურა და აღარ არის საჭირო იმ შედარებით კერძო და ხელოვნური მეთოდების გამოყენება, რომლებიც აქამდე გამოიყენებოდა. ნაშრომში კიდევ შევხვდებით რამდენიმე საინტერესო მიგნებასა და არსებული მეთოდების გაუმჯობესებას.

შემუშავებულია ასევე მომგებიანობის ტესტირების შესაბამისი გამოთვლითი პროცედურა, რომელიც რეალიზებულია Exsel-ის ცხრილებში. დანართში მოყვანილია ჩატარებული გამოთვლების მრავალი

საილუსტრაციო მაგალითი და ნაშრომს თან ახლავს floppy disk, რომლის გამოყენება შესაძლებელია რეალური პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, მე როგორც ხელმძღვანელს მიზანშეწონილად მიმაჩნია ნინო წერეთლის ნაშრომის “მომგებიანობის ტესტირება სიცოცხლის დაზღვევის ზოგად მოდელში” წარდგენა მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად.

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი /გ.მირზაშვილი/

1. ამოცანის დასმა

რისკების გადანაწილება სადაზღვევო საქმიანობის ერთერთ ფუძემდებელ პრინციპს წარმოადგენს. იგი ორ ეტაპად ხორციელდება. პირველ ეტაპზე რისკების პირველადი გადანაწილება პირველად ბაზარზე ხორციელდება, სადაც უშუალოდ დამზღვევები და პირდაპირი მზღვეველები მოქმედებენ. პირდაპირი მზღვეველი "აგროვებს " დამხღვევების მიერ გადმოცემულ რისკებს, ქმნის პორტფელს და ამით დამზღვევებს შორის ამ რისკების პირველად გადანაწილებას ახორციელებს. როგორც წესი, სხვადასხვა მიზეზების გამო (პირდაპირი მზღვეველის განკარგულებაში არსებული ტევადობის არასაკმარისობა, პორტფელის სიმცირე და შესაბამისად მისი არასტაბილურობა, საჭირო სტატისტიკური მონაცემების და ან გამოცდილების უქონლობა და სხვა) აღმოჩნდება, რომ სადაზღვევო დაფარვის სანდოობის (უსაფრთხოების) თვალსაზრისით რისკების პირველადი გადანაწილება არ არის საკმარისი და მეორე ეტაპზე ხორციელდება რისკების მეორადი გადანაწილება. მეორადი გადანაწილება მეორადი სადაზღვევო ბაზრის მეშვეობით ხორციელდება, რომელზეც უკვე პირდაპირი მზღვეველები და გადამზღვეველები მოქმედებენ.

პირდაპირი მზღვეველები გადასცემენ გადამზღვეველებს თავისი პორტფელების ნაწილებს (ან მთლიანად პორტფელებს) რის შედეგადაც გადამზღვეველთან იქმნება უაღრესად დიდი მოცულობის პორტფელები, რომლებიც ამის გამო სტატისტიკურად მდგრადია, რაც უზრუნველყოფს რისკების განთავსების უსაფრთხოების მაღალ დონეს. რასაკვირველია გადამზღვეველ კომპანის უნდა გააჩნდეს სოლიდური კაპიტალი, რაც შეუქმნის მას საქმის წარმოებისთვის საჭირო ტევადობას.

სქემატურად შეიძლება ითქვას, რომ მეორად ბაზარზე პირდაპირ მზღვეველებსა და გადამზღვეველებს შორის დაახლოებით ისეთივე ურთიერთობაა, როგორც პირველად ბაზარზე დამზღვევებსა და პირდაპირ მზღვეველებს შორის. ანუ რისკის "გადამცემი"---- ცედენტი (დამზღვევი ან პირდაპირი მზღვეველი შესაბამისად) გადასცემს რისკს (მთლიანად ან ნაწილობრივ) "მიმღებს" (პირდაპირ მზღვეველს ან გადამზღვეველს შესაბამისად), რისთვისაც ამ უკანასკნელს უხდის პრემიას (დაზღვევის ან გადაზღვევის შესაბამისად).

სწორი და ეფექტური გადაზღვევის პროგრამის შემუშავება პირდაპირი მზღვეველის ერთერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

პროგრამა უნდა იყოს ოპტიმალური იმ გაგებით, რომ არ უნდა იყოს შეძენილი არც ჭარბი და არც არასაკმარისი დამატებითი ტევადობა. ჭარბი ტევადობის შეძენა გარანტირებულ უსაფრთხოებას უზრუნველყოფს, მაგრამ ამავე დროს ზედმეტი გადაზღვევის პრემიის გადახდას გამოიწვევს, რაც პირველად ბაზარზე არსებული კონკურენციის პირობებში (ანუ ისეთ პირობებში, როდესაც შეუძლებელია სადაზღვევო პრემიის პირდაპირი მზღვეველის სურვილის მიერ დანიშვნა) ცედენტის საბოლოო ფინანსური შედეგის გაუვარესებას ნიშნავს. მეორეს მხრივ არასაკმარისი ტევადობის შეძენამ საერთოდ პირდაპირი მზღვეველის გაკოტრება შეიძლება გამოიწვიოს, ვინაიდან მან შეიძლება ვერ შესძლოს ვალდებულებების გასტუმრება.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის პროგრამის შემუშავების საკითხი. პროპორციული გადაზღვევა საერთოდაც უაღრესად გავრცელებულია სადაზღვევო პრაქტიკაში, ხოლო განვითარებად სადაზღვევო ბაზრებზე (როგორიც მაგ. საქართველოს ბაზარია) იგი გადაზღვევის ძირითად ფორმას წარმოადგენს. ეს იმის გამო ხდება, რომ პროპორციული გადაზღვევა საშუალებას უქმნის განვითარებად პირდაპირ მზღვეველს ფინანსურად უსაფრთხო ვითარებაში წარმართოს თავისი “ბიზნესი”.

პროპორციული გადაზღვევის მთავარი ნიშან—თვისება იმაში მდგომარეობს (დასახელებაც ამით არის განპირობებული), რომ გადაზღვევაში გადაცემული ყოველი რისკისთვის მის მიერ გამოწვეული შესაძლო ზარალი და ამ ზარალის ის ნაწილი, რომელიც ცედენტმა უნდა გადაიხადოს პროპორციული სიდიდეებია. პროპორციულობის კოეფიციენტი უდრის ამ რისკის შესაბამისი მთლიანი პრემიის იმ ნაწილს, რომელსაც მასში შეადგენს ცედენტის მიერ დატოვებული პრემია. ეს უკანასკნელი წილი ყოველი რისკისთვის წინასწარ განისაზღვრება ხელშეკრულების პირობებით.

თუ ეს წილი ერთი და იგივეა რისკების გარკვეული ერთობლიობისთვის, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ერთობლიობა გადაზღვეულია კვოთურად ზემოთხსენებული საკუთარი წილით. თუ წილი სხვადასხვაა სხვადასხვა რისკისთვის, მაშინ საქმე გვაქვს ზოგად პროპორციულ გადაზღვევასთან.

ზოგადი პროპორციული გადაზღვევის დიზაინი ტიპიურად შემდეგნაირად გამოიყურება: პორტფელში არსებული რისკების გარკვეულ დიაპაზონში მაგ. ისეთი რისკებისთვის, რომელთა სადაზღვევო თანხა არ აღემატება გარკვეულ სიდიდეს, მოქმედებს კვოთური გადაზღვევა გარკვეული, შეთანხმებული ცედენტის წილით. დანარჩენი რისკების “ზემოთა ნაწილები”, რომლებიც

ზემოთხსენებულ ზღვარს აღემატება მთლიანად გადაეცემა გადამზღვეველს, ანუ როგორც ამბობენ რისკების ამ ნაწილებისთვის მოქმედებს ე.წ. სურპლასის ტიპის გადაზღვევა. ასეთი კომბინირებული დიზაინი შედეგად გვაძლევს ზოგად პროპორციულ გადაზღვევას, რომლის დროსაც ცედენტს ყოველ რისკში საკუთარი მონაწილეობის გარკვეული წილი გააჩნია. ამგვარი გადაზღვევა ბუნებრივია განვითარებადი ბაზრებისათვის, ვინაიდან მის მიხედვით რისკის ზრდასთან ერთად მცირდება ცედენტის წილი.

წინამდებარე ნაშრომში დასახულია შემდეგი ამოცანები:

1. წინა სადაზღვევო წლების მონაცემების ანალიზი და რეტროსპექტიულად ამ წლებისათვის საუკეთესო პროპორციელი გადაზღვევის გეგმის შემუშავება. ეს ამოცანა ორ ეტაპად არის განხილული. პირველ ეტაპზე ხდება ერთი გასული წლის, ხოლო მეორე ეტაპზე მრავალი გასული წლის ანალიზი.
2. მეორე ამოცანა იგივე პრობლემასთან არის დაკავშირებული რაც პირველი, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ გადაზღვევის პროგრამის "ხარისხი" ფასდება არა უშუალოდ მიღებული ფინანსური შედეგით, არამედ ე.წ. სარგებლიანობის ფუნქციის მიხედვით.
3. გადაზღვევის შედეგად ცედენტთან დარჩენილი პორტფელის სტოქასტური მოდელის შემუშავება და მასზე დაყრდნობით ისეთი პროპორციული გადაზღვევის დადგენა, რომლის დროსაც ე. წ. გაკოტრების ალბათობა უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს.

მიზნად ასევე იყო დასახული ჩამოთვლილი ამოცანების ამოხსნების "რიცხვამდე" დაყვანა ანუ შესაბამისი გამოთვლილი პროცედურების შემუშავება.

2. გასული წლის პორტფელის ანალიზი. საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენს ხელთ არის სრული მონაცემები დაზღვევის გარკვეულ სახეობაში არსებული გასული წლის

სადაზღვევო პორტფელის შესახებ. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ვიხილავთ ქონებრივ დაზღვევას და ამგვარად ეს მონაცემები შემდეგნაირად გამოიყურება:

ა) ზრდადობის მიხედვით დალაგებული სადაზღვევო თანხები:

$$S_1, S_2, ..., S_N.$$

ბ) შესაბამისი მომხდარი ზარალის სიდიდეები:

$$L_1, L_2, ..., L_N.$$

L_i ; $i = 1,2,..., N$ წარმოადგენს S_i სადაზღვევო თანხის მქონე რისკის გასულ სადაზღვევო წლის განმავლობაში განხორციელების შედეგს – ზარალს, რომელიც ხშირად 0-ის ტოლიც იქნება.

ვიგულისხმოთ, რომ S_i რისკისთვის გამოყენებული იყო α_i ტარიფი, ანუ ამ რისკის დაზღვევაში მზღვეველმა მიიღო

$$\pi_i = \alpha_i \cdot S_i .$$

სადაზღვევო პრემია. მთლიანად აკრეფილი პრემია იქნება

$$\pi = \sum_{i=1}^{N} \pi_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot S_i .$$

ამგვარად განხილული პორტფელის საბოლოო ფინანსური შედეგი არის

$$X = \pi - L$$

სადაც

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

წარმოადგენს ჯამურ ზარალს.

ცხადია, რომ იმისდა მიხედვით თუ რამდენად სწორად იყო შერჩეული α_i ტარიფები და რამდენად "იღბლიანი" იყო გასული სადაზღვევო წელი X-მა შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობა, როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი

დავუშვათ, რომ განხილული პორტფელი პროპორციულად იყო გადაზღვეული და რომ ეს პროპორციული გადაზღვევა შემდეგი (პრაქტიკაში გავრცელებული) კონკრეტული ტიპის იყო. სადაზღვევო თანხების $[0;Z]$ დიაპაზონში მოქმედებდა კვოთური გადაზღვევა მზღვეველის (ცედენტის) საკუთარი წილით q, $0 < q \leq 1$, ხოლო $(Z;S_N]$ დიაპაზონში მოქმედებდა სურპლასის ტიპის გადაზღვევა. ამგვარი კომბინირებული პროპორციული გადაზღვევის მათემატიკური მოდელი შემდეგნაირად გამოიყურება:

ა) თუ $S_i \leq Z$, მაშინ ცედენტი იტოვებს $q\pi_i$ პრემიას და იხდის qL_i ზარალს, ხოლო გადამზღვეველი იღებს $(1-q)\pi_i$ პრემიას და იხდის $(1-q)L_i$ ზარალს.

ბ) თუ $S_i > Z$, მაშინ ცედენტი იტოვებს $q\alpha_i Z$ პრემიას და იხდის $q\frac{Z}{S_i}L_i$ ზარალს, ხოლო გადამზღვეველი იღებს $(\pi_i - qZ\alpha_i)$ პრემიას და იხდის $(L_i - q\frac{Z}{S_i}L_i)$ ზარალს. ერთიანად შეიძლება ითქვას, რომ ნებისმიერი S_i რისკისთვის მზღვეველის წილია

$$q_i = q\frac{\min(Z;S_i)}{S_i} \qquad (2.\ 1)$$

მზღვეველი იტოვებს $q_i\pi_i$ პრემიას და იხდის q_iL_i ზარალს;

გადამზღვეველი ღებულობს $(1-q_i)\pi_i$ პრემიას და იხდის $(1-q_i)L_i$ ზარალს.

გადაზღვევის განხორციელების შემდეგ მზღვეველი მიიღებს შემდეგ ფინანსურ შედეგს:

$$X_{(ced)}=\sum_{i=1}^{N}q_i\left(\pi_i-L_i\right) \qquad (2.\ 2)$$

ხოლო გადამზღვეველი:

$$X-X_{(ced)} \qquad (2.\ 3)$$

როგორც ვხედავთ, განხილული პროპორციული გადაზღვევა განისაზღვრება $(q;Z)$ წყვილით და გასული წლის პორტფელის ანალიზის ფარგლებში ჩვენი ამოცანაა განვსაზღვროთ თუ, როგორი გადაზღვევა იქნებოდა საუკეთესო ცედენტისთვის.

გადაზღვევის "ხარისხის" საზომად ავიღოთ სწორედ $X_{(ced)}$ სიდიდე და სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ $q>0$ დაფიქსირებულია (როგორც შემდგომში ვნახავთ, ეს დაშვება არ არის არსებითი ამოცანის ამოხსნისათვის). ასევე ვიგულისხმოთ, რომ $Z\geq S_1$, ანუ ცედენტმა აუცილებლად უნდა დაიტოვოს გარკვეული რისკი. ჩავწეროთ (2. 2) ტოლობა შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}X_{(ced)}&=\pi_{(ced)}-L_{(ced)}=q\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\min(Z;S_i)-q\sum_{i=1}^{N}\frac{L_i}{S_i}\min(Z;S_i)=\\&=q\left(\sum_{i=1}^{N}\min(Z;S_i)\left(\alpha_i-\frac{L_i}{S_i}\right)\right)\end{aligned} \qquad (2.\ 4)$$

ჩვენი ამოცანაა ისეთი Z-ის პოვნა, რომელიც (2. 4) ფუნქციას მიანიჭებდა უდიდეს მნიშვნელობას. ადვილი დასანახია, რომ (2. 4) ფუნქცია თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს მაშინ, როცა

$$\sum_{i=1}^{N} \min(Z; S_i)\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) \qquad (2.\ 5)$$

ფუნქცია მიაღწევს თავის უდიდეს მნიშვნელობას. ($q > 0$ და არ მოქმედებს საუკეთესო Z-ის შერჩევაზე). (2. 5) ფუნქცია წარმოადგენს ტეხილს და ცხადია იგი თავის უდიდეს მნიშვნელობას მიაღწევს ტეხილის ერთერთ წვეროზე; ანუ რომელიმე $Z = S_i$; $i = 1,2,...,N$ წერტილში

მართლაც:

$$\frac{X_{(ced)}(Z)}{q} = \begin{cases} Z\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right), & 0 < Z \le S_1 \\ S_1\left(\alpha_1 - \frac{L_1}{S_1}\right) + Z\sum_{i=2}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right), & S_1 < Z \le S_2 \\ ------------------------------ & \\ \sum_{i=1}^{k} S_i\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) + Z\sum_{i=k+1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right), & S_k < Z \le S_{k+1} \\ ------------------------------ & \\ \sum_{i=1}^{N-1} S_i\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) + Z\left(\alpha_N - \frac{L_N}{S_N}\right), & S_{N-1} < Z \le S_N \end{cases}$$

k-ურ უბანზე ეს ფუნქცია წრფივია და კუთხური კოეფიციენტი $\sum_{i=k+1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right)$-ის გათვალისწინებით (იმისდა მიხედვით დადებითია თუ უარყოფითი) ზრდადია ან კლებადი.

კომპიუტერის დახმარებით ამ ამოცანის ამოხსნა არ წარმოადგენს სირთულეს. მარტივი პროგრამით $Excel$-ის ცხრილებში

(2. 5) ფუნქციის მნიშვნელობების დათვლა ადვილია $Z = S_1,...,S_N$ წერტილებში. ვიცით რა წინა წლის პორტფელის მონაცემები, კერძოდ S_i-ები; L_i-ები; α_i-ები, მივიღებთ (2. 5) ფუნქციის N ცალ მნიშვნელობას და კომპიუტერი ამოარჩევს მათ შორის უდიდესს. საუკეთესო Z იქნება სწორედ ის S_i, რომლის დროსაც (2. 5) ფუნქციამ მიიღო თავისი უდიდესი მნიშვნელობა.

ალმოჩნდა, რომ

$$\mathrm{A}_k = X_{(ced)}\left(S_k\right)$$

მნიშვნელობების პროგრამულად გამოსათვლელად სასარგებლოა რეკურენტული ფორმულა, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება იყოს მიღებული;

$$\mathrm{A}_k = X_{(ced)}\left(S_k\right) = q\left(\sum_{i=1}^{k-1} S_i\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) + S_k\sum_{i=k}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right)\right)$$

$$\mathrm{A}_{k+1} = X_{(ced)}\left(S_{k+1}\right) = q\left(\sum_{i=1}^{k} S_i\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) + S_{k+1}\sum_{i=k+1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right)\right)$$

$$\mathrm{A}_{k+1} - \mathrm{A}_k = q\left(S_{k+1} - S_k\right)\sum_{i=k+1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right)$$

საბოლოოდ

$$\mathrm{A}_k = \mathrm{A}_{k+1} - q\left(S_{k+1} - S_k\right)\sum_{i=k+1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{L_i}{S_i}\right) \qquad (2.\ 6)$$

$$\mathrm{A}_N = X_{(ced)} \cdot q$$

დანართში მოყვანილ (2.1) – (2.3) ცხრილებში და ნახატებზე წარმოდგენილია საილუსტრაციო მაგალითები. ამ ცხრილების მეორე სვეტში წარმოდგენილია საილუსტრაციო პორტფელი – გარკვეულ ფულად ერთეულებში გაზომილი და ზემოდან ქვემოთ

ზრდადობით დალაგებული სადაზღვევო თანხები (ეს თანხები გადანომრილია პირველ სვეტში). გარდა ამ სვეტისა საწყისი მონაცემები მოცემულია მესამე და მეოთხე სვეტებში - შესაბამისად ტარიფები და მომხდარი ზარალები. მეხუთე სვეტში გამოთვლილია მეზობელ სადაზღვევო თანხებს შორის სხვაობები, რაც საჭიროა (2. 6) რეკურენტული ფორმულისათვის. მეექვსე სვეტში გამოთვლილია $\alpha_i - \dfrac{L_i}{S_i}$ გამოსახულებები, რაც ასევე (2. 6) ფორმულისთვის არის საჭირო. მეშვიდე სვეტში (ბოლო სტრიქონი) მიღებულია

$$X = \pi - L$$

სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს პორტფელის ფინანსურ შედეგს გადაზღვევის გარეშე. შემდეგ სვეტში (2. 6) რეკურენტული ფორმულის გამოყენებით გამოთვლილია

$$\mathrm{A}_k = X_{(ced)}(S_k)$$

სიდიდეები, დაწყებული ბოლო სტრიქონიდან, რომელში მდგომი სიდიდეც ემთხვევა მეშვიდე სვეტის ბოლო სტრიქონში მოთავსებულ X სიდიდეს გამრავლებულს q-ზე, ვინაიდან (2. 6) ფორმულაში გვაქვს საწყისი პირობა

$$\mathrm{A}_N = X \cdot q$$

მეცხრე სვეტში პროგრამა ირჩევს უდიდეს A_k (აღნიშნულს X^*-ით) და მიგვითითებს საუკეთესო Z-ზე.

ცხრილი აწყობილია ისე, რომ საწყისი პირობების ნებისმიერი ცვლილება ავტომატურად იწვევს შედეგის შეცვლას.

ცხრილ 2.1-ში წარმოდგენილია შემდეგი ზარალები:

$L_{11} = 10000$, $L_{18} = 15000$, $L_{27} = 20000$, $L_{42} = 25000$.

საბოლოო ფინანსური შედეგი გადაზღვევის გარეშე გამოვიდა 3766 – დადებითი სიდიდე. A_k სიდიდეების ცვალებადობა წარმოდგენილია მე-8 სვეტში, ხოლო შესაბამისი გრაფიკი – ნახ. 2.1-ზე. ამ მაგალითში საუკეთესო გადაზღვევა არის ისეთი, როდესაც $Z = S_{37} = 426000$, საუკეთესო ფინანსური შედეგი კი შეადგენს 1807 –ს.

წინა მაგალითთან შედარებით ცხრილ 2.2-ში შეცვლილია ტარიფები და ზარალები. ტარიფები უმნიშვნელოდ არის შეცვლილი, ხოლო ზარალებში “გაჩნდა” დიდი ზარალი - $L_{43} = 150000$. ამან გამოიწვია პორტფელის “დამძიმება”, რაც იმაში გამოიხატა, რომ გადაზღვევის გარეშე შედეგი უარყოფითი გახდა და საუკეთესო გადაზღვევა ისეთი აღმოჩნდა, როდესაც ცედენტი თავის თავზე მინიმალურ შესაძლო რისკს იტოვებს - $Z = S_1$. შესაბამისი გრაფიკი წარმოდგენილია ნახ. 2.2-ზე.

მესამე მაგალითში (ცხრ.2.3) ზარალები მცირეა, ტარიფი კი – გაზრდილი. წინა მაგალითთან შედარებით ეს მეორე უკიდურესობაა – სცენარი იმდენად კარგია კომპანიისთვის, რომ ცხადია საუკეთესო გადაზღვევა ითვალისწინებს მთელი პორტფელის ცედენტის პასუხისმგებლობაზე დატოვებას - $Z = S_{45}$. ცხადია, რომ შესაბამისი გრაფიკი (ნახ.2.3) ზრდადი ფუნქციაა.

სადაზღვევო პრაქტიკაში ხშირად ხდება, რომ მზღვეველი და გადამზღვეველი თანხმდებიან რაღაც β_i ტარიფებზე, რომლის მიხედვითაც უნდა იყოს გადახდილი გადაზღვევის პრემია. მზღვეველს უფლება აქვს, თუ შესძლებს, სინამდვილეში გამოიყენოს α_i ტარიფი ისე, რომ

$$\alpha_i \geq \beta_i \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

საინტერესოა ახდენს თუ არა ეს გავლენას ოპტიმალური გადაზღვევის სტრუქტურაზე. ამის გამოსარკვევად გამოვთვალოთ $X_{(ced)}$ სიდიდე ახალ პირობებში. გვაქვს:

$\sum_{i=1}^{N}(1-q)\beta_i S_i$ გადამზღვეველის პრემია;

$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i S_i$ მთლიანი პრემია;

$$\sum_{i=1}^{N} S_i(\alpha_i-(1-q_i)\beta_i)=\sum_{i=1}^{N} S_i\left(\alpha_i-\left(1-q\frac{\min(S_i,Z}{S_i}\right)\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{N} S_i(\alpha_i-\beta_i)+q\sum_{i=1}^{N}\beta_i\min(S_i,Z)\text{ -}$$

- მზღვეველის პრემია;

$\sum_{i=1}^{N} q_i L_i = q\sum_{i=1}^{N}\min(Z,S_i)\frac{L_i}{S_i}$ - მზღვეველის ზარალი.

ცხადია

$$X_{(ced)}=\sum_{i=1}^{N} S_i(\alpha_i-\beta_i)+q\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i-\frac{L_i}{S_i}\right)\min(S_i,Z)\quad . \tag{2.7}$$

გამოდის, რომ ახალ პირობებში ცედენტის საბოლოო შედეგს ემატება $\sum_{i=1}^{N} S_i(\alpha_i-\beta_i)$ დაებითი სიდიდე, რომელიც არ არის დამოკიდებული (q,Z) წყვილზე და ამიტომ გავლენას არ ახდენს ოპტიმალური გადაზღვევის სტრუქტურაზე. ამგვარად, ამ ახალ პირობებშიც შესაძლებელია ზემოთ აღწერილი *Excell*-ის პროგრამის გამოყენება ოპტიმალური (q,Z) წყვილის საპოვნელად, ოღონდ α_i ტარიფის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ β_i ტარიფები.

3. გასული რამდენიმე წლის პორტფელის ანალიზი. საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ბოლო n წლის განმავლობაში სადაზღვევო პორტფელი უცვლელი რჩებოდა და

$$S_1, S_2, ..., S_N$$

სადაზღვევო თანხებისგან შედგებოდა.

დავუშვათ, რომ i-ური დაკვირვებული წლის განმავლობაში მოქმედებდა

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{iN}$$

სატარიფო სტრუქტურა, ანუ i-ურ წელს S_j რისკში გადახდილი იყო

$$\pi_{ij} = \alpha_{ij} S_j$$

პრემია. ამგვარად i-ურ წელს აკრეფილმა პრემიამ შეადგინა

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} S_j \qquad (3.\ 1)$$

სიდიდე. ასევე დავუშვათ, რომ i-ურ წელს გვქონდა შემდეგი ზარალები:

$$L_{i1}, L_{i2}, ..., L_{iN}$$

რომელთა შორის კვლავ არის ხშირი ნულოვანი ზარალები. აღვნიშნოთ:

$$L_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} \qquad (3.\ 2)$$

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ შევარჩიოთ წინა პარაგრაფში აღწერილი ტიპის პროპორციული გადაზღვევა $(q;Z)$, რომელიც ამ n წლის განმავლობაში მზღვეველს საუკეთესო ჯამურ შედეგს მოუტანდა (კვლავ ვგულისხმობთ, რომ $q > 0$ ფიქსირებულია და $Z > S_1$). ყოველ i-ურ წელს მზღვევლის წილი j-ურ რისკში იქნებოდა

$$q_j = q\frac{\min(S_j;Z)}{S_j}$$

და შესაბამისად

$$X_i^{(ced)} = \sum_{j=1}^{N} q_j\left(\pi_{ij} - L_{ij}\right) \qquad (3.\ 3)$$

როგორც ეს წინა პარაგრაფში იყო მიღებული.

$$X_i^{(ced)} = q\sum_{j=1}^{N}\min(Z;S_j)\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j}\right) \qquad (3.\ 4)$$

შემოვიღოთ $X^{(ced)}$ სიდიდე – ცედენტის ჯამური ფინანსური შედეგი:

$$X^{(ced)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(ced)} \qquad (3.\ 5)$$

გვაქვს:

$$X^{(ced)} = q\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\min(Z;S_j)\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j}\right) =$$

$$= q\sum_{j=1}^{N}\min(Z;S_j)\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j}\right) \qquad (3.\ 6)$$

ამოცანა მდგომარეობს ისეთი Z-ის შერჩევაში, რომელიც (3. 6) ფუნქციას მიანიჭებდა უდიდეს მნიშვნელობას. (3. 6) გამოსახულება ჰგავს (2. 5) გამოსახულებას იმ განსხვავებით, რომ

ყოველი $\min(Z;S_j)$ მრავლდება $\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}-\frac{L_{ij}}{S_j}\right)$ ჯამზე და არა ცალკეულ $\left(\alpha_j-\frac{L_j}{S_j}\right)$-ზე.

ამ ჯამის მნიშვნელობა ყოველი j-თვის შეიძლება გამოითვალოს *Excel*-ის ცხრილში და ამის შემდეგ საუკეთესო Z-ის მოძებნა შეიძლება იგივე პროგრამით, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო გამოყენებული.

აღვნიშნოთ:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}-\frac{L_{ij}}{S_j}\right)\equiv a_j$$

მაშინ

$$X^{(ced)}=q\sum_{j=1}^{N}\min(Z;S_j)\cdot a_j \qquad (3.\ 7)$$

ცხადია, რომ ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, ამ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა. მაშინ, როდესაც Z-ის ნაცვლად ჩასმულია ერთერთი S_j ; $j=1,2,...,N$. წინა პარაგრაფში გამოყენებული რეკურენტული ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს. თუ

$$\mathrm{A}_k=q\sum_{j=1}^{N}\min(S_k;S_j)\cdot a_j$$

მაშინ

$$\mathrm{A}_k=\mathrm{A}_{k+1}-q\cdot(S_{k+1}-S_k)\sum_{j=k+1}^{N}a_j$$

$$\mathrm{A}_N=q\cdot\sum_{i=1}^{n}(\pi_i-L_i)$$

(3.1) – (3.2) ცხრილებში და ნახატებზე მოყვანი;ლია საილუსტრაციო მაგალითები.

ცხრილები (3.1) – (3.2) თავისი სტრუქტურით ჰგავს (2.1) – (2.3) ცხრილებს. აქაც პირველ სვეტში მოთავსებულია რისკების რიგითი ნომრები, მეორეში – სადაზღვევო თანხები, რომლებიც უცვლელად ითვლება. საილუსტრაციოდ ჩვენ ვთვლით, რომ გაგვაჩნია წინა სამი წლის მონაცემები ტარიფებზე და ზარალებზე, რომლებიც მოთავსებულია შემდგომ ექვს სვეტში. შემდგომ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მსგავს ამოცანას, რომელშიც გადაზღვევის "ხარისხის" შესაფასებლად გამოვიყენებთ ე.წ. სარგებლიანობის ფუნქციას. ეს უკანასკნელი განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი არგუმენტებისათვის და იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს ამ პარაგრაფის შემდეგ პარაგრაფთან შედარება, პორტფელის ფინანსური შედეგი დადებითი უნდა იყოს. ამავე დროს, როგორც ეს წინა პარაგრაფში ვნახეთ, ეს შედეგები თავისთავად უარყოფითიც შეიძლება აღმოჩნდეს. ამ პრობლემის გადასალახავად მოდელში შემოვიღებთ ახალ V_i სიდიდეებს, რომელსაც შემდეგი შინაარსი შეიძლება ჰქონდეს. ყოველ წელს კომპანია დაზღვევის განხილულ სახეობაში გამოჰყოფს V_i სარისკო კაპიტალს, რომელმაც უნდა დააბალანსოს შესაძლო უარყოფითი შედეგი. ახალ ვითარებაში ყოველწლიური საბოლოო შედეგი იქნება

$$V_i + X_i^{(ced)}$$

ეს ნაბიჯი ამ პარაგრაფის შედეგებზე გავლენას არ ახდენს, ანუ V_i სიდიდეების შემოღებით საუკეთესო გადაზღვევა არ იცვლება.

ამგვარად (3.1) – (3.2) ცხრილებში ფიგურირებს V_i სიდიდეები (სინამდვილეში საილუსტრაციოდ აღებულია $V_1 = V_2 = V_3 = V$) და ზემოთ ხსენებული რეკურენტული ფორმულის გამოყენებით მე-13 სვეტში გამოითვლება $X_{(ced)}(S_k) + 3V$ სიდიდეები. მათ შორის უდიდესი მიუთითებს იმ Z -ზე, რომელიც საუკეთესოა ცედენტისთვის სამი წლის შედეგების მიხედვით.

კერძოდ, ცხრილ (3.1)-ში ფიგურირებს ის სამი წელი ერთად, რომლებიც წინა პარაგრაფში წარმოდგენილი იყო ცხრილებში (2.1)–(2.3), როგორც ცალკეული საილუსტრაციო მაგალითები. ჩვენ ვნახეთ, რომ (2.1) მაგალითისთვის საუკეთესო იყო $Z = S_{37}$, (2.2)-თვის -- $Z = S_1$, ხოლო (2.3)-თვის $Z = S_{45}$. (3.1) მაგალითისთვის კი ჯამური ფინანსური შედეგის მიხედვით საუკეთესო აღმოჩნდა $Z = S_{40}$ რისი ვარაუდიც უშუალოდ სამი ცალკეული წლის შედეგების მიხედვით შეუძლებელი იქნებოდა.

ცხრილ(3.2)-ში უცვლელი დავტოვეთ სადაზღვევო თანხები და სატარიფო სტრუქტურა. შეიცვალა მხოლოდ ზარალები. ამასთან პირველი ორი წელი შედარებით უზარალოა, ხოლო მესამე წელს გვაქვს ორი “დიდი” ზარალი: 100000-ანი და 150000-ანი მომხდარი შესაბამისად S_{30} და S_{42} სადაზღვევო თანხებზე. ამან ბუნებრივია გამოიწვია Z -ის ოპტიმალური მნიშვნელობის შემცირება და ამჯერად $Z = S_{16}$. აღნიშნული ცვლილება ნათლად ჩანს ნახ.(3.1) და (3.2)-ზე.

4. გასული რამდენიმე წლის ანალიზი. საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა სარგებლიანობის ფუნქციის გათვალისწინებით.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ იგივე ამოცანას, როგორც წინა პარაგრაფში, ოღონდ დავუშვებთ, რომ მზღვეველი თავის წლიურ შედეგს აფასებს არა უშუალოდ $X_i^{(ced)}$ სიდიდით, არამედ $U(X_i^{(ced)})$ სიდიდის მიხედვით, სადაც $U(x)$ ე.წ. სარგებლიანობის ფუნქციაა.

სარგებლიანობის ფუნქცია ნეიმანის და მონგერშტერნის მიერ არის შემოღებული და ფართოდ გამოიყენება სადაზღვევო საქმეში. მას შემდეგი თვისებები გააჩნია: $U(x)$ არის მკაცრად ზრდადი და ამოზნექილი (შეიძლება იყოს წრფივიც). შეიძლება ითქვას, რომ წინა პარაგრაფში განხილული იყო სწორედ წრფივი სარგებლიანობის ფუნქციის შემთხვევა. ამ პარაგრაფში ჩვენ დავუშვებთ, რომ $U(x)$ არ არის წრფივი, კერძოდ მხედველობაში გვექნება შემდეგი მაგალითი:

$$U(x) = \frac{1}{a}(1-e^{-ax})$$

ამ მაგალითში $a>0$ არის ე.წ. რისკის “მიუღებლობის” პარამეტრი (რაც უფრო მეტია a, მით უფრო “ფრთხილია” მზღვეველი). წრფივი სარგებლიანობის ფუნქციის გამოყენება ნიშნავს იმის დაშვებას, რომ მზღვეველი “ინდიფერენტულია” რისკისადმი (“არამგრძნობიარეა” რისკისადმი).

ჩვენ გამოვიყენებთ ჯამური სარგებლიანობის პრინციპს, რომლის მიხედვითაც გადაზღვევა საუკეთესო იქნება მხღვეველისთვის, თუ:

$$U(Z) = \sum_{i=1}^{n} U\left(V_i + X_i^{(ced)}\right) \qquad (4.1)$$

სიდიდე მიაღწევს უდიდეს მნიშვნელობას.

კონკრეტული შედეგების მიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც $U(x)$ ზოგადი სარგებლიანობის ფუნქციაა, საკმაოდ რთულია. ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ იმ კონკრეტულ შემთხვევას, როდესაც

$$U(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$$

გვაქვს:

$$U(Z) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-a\left(V_i + X_i^{(ced)}\right)}\right)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$X_i^{(ced)} = q\sum_{j=1}^{N}\min\left(Z; S_j\right)\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_i}\right)$$

მივიღებთ

$$U(Z) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-a\left(V_i + q\sum_{j=1}^{N}\min\left(Z;S_j\right)\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j}\right)\right)}\right)$$

მოხერხებულია $U(Z)$ ფუნქციის უბან-უბან განხილვა:

თუ $0 < Z \le S_1$

$$U(Z) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-a\left(V_i + q\cdot Z\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j}\right)\right)}\right),$$

თუ $S_{k-1} \le Z \le S_k$; $k = 2,3,\ldots,N$

$$U(Z)=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{-a\left(V_i+q\left(\sum_{j=1}^{k-1}S_j\left(\alpha_{ij}-\frac{L_{ij}}{S_j}\right)\right)+Z\sum_{j=k}^{N}\left(\alpha_{ij}-\frac{L_{ij}}{S_j}\right)\right)}\right)$$

სხვათა შორის შევნიშნოთ, რომ წრფივი სარგებლიანობის ფუნქციის დროს q არ მოქმედებდა საუკეთესო Z-ის შერჩევაზე, აქ კი მოქმედებს.

ვიპოვოთ $U(Z)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის მიმნიჭებელი წერტილი ყოველ ცალკეულ უბანზე და შემდგომ ამოვარჩიოთ გლობალური უდიდესი მნიშვნელობის მიმნიჭებელი წერტილი.

წინასწარ გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ რაც უფრო დიდია a პარამეტრი მით უფრო “ფრთხილია” კომპანია და მით უფრო მიუღებელია მისთვის რისკი. საინტერესოა რას ნიშნავს დიდი ან პატარა a პარამეტრი პრაქტიკულად. როგორც აღმოჩნდა a პარამეტრს არ გააჩნია უპირობო მასშტაბი, ანუ დიდია თუ პატარა რომელიმე კონკრეტული a იმაზეა დამოკიდებული თუ რა სიდიდის რისკებისგან შედგება პორტფელი. მაგალითად: ჩვენს მიერ წინა პარაგრაფებში განხილული საილუსტრაციო პორტფელისთვის (რომელსაც შემდგომში გამოვიყენებთ) გამოყენებული ტარიფებისათვის და მომხდარი ზარალებისათვის აღმოჩნდა, რომ a-ს ისეთი მნიშვნელობები როგორიც არის 0.1 , 0.01 და 0.001-ც კი უკვე დიდია, ანუ კომპანია იმდენად “ფრთხილია”, რომ მისი საქციელი უინტერესოა. სხვა სიტყვებით საკმაოდ მცირე Z-დან დაწყებული $U(Z)$ მუდმივი ხდება – კომპანიას არ სურს საკუთარ პასუხისმგებლობაზე რამდენადმე მნიშვნელოვანი რისკის დატოვება.

ამ ნაშრომში ჩვენ ვიხილავთ იმ შემთხვევას, როდესაც a მცირეა, ანუ კომპანია საკმარისად “რისკიანია”, რაც ჩვენი

საილუსტრაციო მაგალითებისთვის ნიშნავს, რომ a 0.00001-ის რიგისაა.

აღნიშნულ პირობებში ვიყენებთ $U(Z)$ ფუნქციის მიახლოვებას, რომელიც მიიღება ექსპონენტის მწკრივად გაშლის შედეგად. გვაქვს: თუ $S_{k-1} \le Z \le S_k$, მაშინ

$$U(Z) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(V_i + q\left(\sum_{j=1}^{k-1} S_j \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) + Z \sum_{j=k}^{N} \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) \right) - \frac{a}{2} \left(V_i + q \sum_{j=1}^{k-1} S_j \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) + qZ \sum_{j=k}^{N} \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) \right)^2 \right)$$

Z-ის მიმართ ეს უკვე კვადრატული ფუნქციაა და მისი მაქსიმუმის წერტილი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$Z_k = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(aV_i + aq \sum_{j=1}^{k-1} S_j \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) - 1 \right) \sum_{j=k}^{N} \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) \right]}{aq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{N} \left(\alpha_{ij} - \frac{L_{ij}}{S_j} \right) \right)^2} \qquad (4.2)$$

ამგვარად, გლობალური უდიდესი მნიშვნელობის მიმნიჭებელი წერტილის მოსაძებნად უნდა შევადაროთ ერთმანეთს შემდეგი სიდიდეები:

$U(S_1), U(S_2), \ldots, U(S_N)$, $U(Z_i)$ იმ Z_i-თვის, რომლებიც მოხვდებიან $[S_{i-1}; S_i]$ შუალედში.

ოპტიმალური Z იქნება ის, რომელშიც $U(Z)$ ფუნქცია იქნება უდიდესი. ყოველივე ამის განსახორციელებლად ჩვენს მიერ შედგენილია *Excel*-ის პროგრამა, რომლის მუშაობის შედეგები ქვემოთ მოყვანილია საილუსტრაციო მაგალითების სახით.

ცხრილებში (4.1) და (4.2) მოყვანილია იგივე სამწლიანი სადაზღვევო ისტორიები, როგორც ცხრილებში (3.1) და (3.2). მაგ.

(3.1)-ში მზღვეველისთვის საუკეთესო იყო $Z = S_{40}$, ხოლო მაგ. (4.1)-ში საუკეთესო აღმოჩნდა $Z = S_{19}$. როგორც ვხედავთ Z-ის მნიშვნელობა შემცირდა, რაც იმას ნიშნავს, რომ სარგებლიანობის ფუნქციის შემოღებამ აღნიშნულ მაგალითში ცედენტი "ფრთხილი გახადა". ანალოგიურ სურათს ვხედავთ (3.2) და (4.2) მაგალითების შედარებისას. (3.2)-ში მზღვეველისთვის საუკეთესო იყო $Z = S_{16}$. სარგებლიანობის ფუნქციის გათვალისწინებით კი გამოდის, რომ პორტფელი "მძიმეა" ცედენტისთვის, ამიტომ მზღვეველმა რაც შეიძლება ნაკლები პასუხისმგებლობა უნდა დაიტოვოს საკუთარ თავზე. ამჯერად $Z = S_1$. ზემოთ ხსენებული მაგალითების ამსახველი გრაფიკები იხილეთ ნახ. (4.1) და (4.2)-ზე. (4.3) მაგალითში წინა მაგალითებთან შედარებით შეცვლილია ზარალიანობა. ცხრილ (4.3)-ზე შეგვიძლია ვიხილოთ, რომ განსხვავებით წინა მაგალითებისაგან გაჩნდა ახალი Z_1 და Z_6 "საეჭვო" წერტილები. ეს სწორედ ის მაქსიმუმის წერტილებია, რომლებიც (4.2) ფორმულით მოიცემა. საბოლოოდ ოპტიმალური Z ამოსარჩევია S_k-სა და Z-ის ამ მნიშვნელობებს შორის. აღმოჩნდა, რომ საუკეთესოა $Z = S_{33}$. შესაბამის ნახ.(4.3)-ზე დამატებითი მაქსიმუმის წერტილებიც არის გამოსახული.

5. საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევა: სტოქასტური მოდელი.

მიდგომა, რომელიც წინა პარაგრაფებში იყო წარმოდგენილი შეიძლება გამოყენებული იქნას წარსულში არსებული გადაზღვევის პროგრამის რეტროსპექტული ანალიზისათვის. ასევე, იმ შემთხვევაში როდესაც გაგვაჩნია მონაცემები მრავალი წინა წლის შესახებ, ეს მიდგომა დაგვეხმარება შემდეგი წლისათვის საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის შემუშავებაში.

ამ პარაგრაფში წარმოდგენილია მეორე მიდგომა, რომელიც ასევე გვაძლევს მომავალი წლისათვის გარკვეული აზრით საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის პროგრამის შემუშავებას და რომელიც პირველ მიდგომისაგან განსხვავებით, სტოქასტურ მოდელს ეფუძნება. ეს მოდელი შემდეგნაირად გამოიყურება.

კვლავ ვგულისხმობთ, რომ პორტფელში შემავალი რისკების შესაბამისი სადაზღვევო თანხები ცნობილია და დალაგებულია ზრდადობის მიხედვით:

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_N$$

სიმარტივისათვის კვლავ ჩავთვალოთ, რომ საძიებელი პროპორციული გადაზღვევის q პარამეტრი ფიქსირებული და დადებითია და $Z \geq S_1$. შემოვიღოთ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$$

და აღვნიშნოთ

$$E\xi_i = m$$
$$Var\xi_i = \sigma^2$$

ამ მოდელში L_i – ზარალები უკვე შემთხვევითი სიდიდეებია

$$L_i = S_i \xi_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

ცხადია, რომ

$$EL_i = S_i m$$
$$VarL_i = S_i^2 \sigma^2$$

ξ_i შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების შერჩევით შესაძლებელია სხვადასხვა პრაქტიკული სიტუაციის დამოდელირება. თუ, მაგალითად, ეს სიდიდეები ბერნულისაა, მაშინ მოდელი ითვალისწინებს მხოლოდ ზარალის საერთოდ არ დადგომას ან სრულ განადგურებას.

აღვნიშნოთ ცედენტის ჯამური ზარალი, ყოველგვარი გადაზღვევის გარეშე

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

ცხადია, რომ

$$EL = m \sum_{i=1}^{N} S_i$$
$$VarL = \sigma^2 \sum_{i=1}^{N} S_i^2 .$$

ჩავთვალოთ, რომ ყოველი i-ური რისკის შესაბამისი პრემია – π_i დადგენილია შემდეგი წესით

$$\pi_i = (m + \theta) \cdot S_i$$

აქ θ არის ე. წ. დატვირთვა, რომელიც მზღვეველს იცავს ზარალების მათივე საშუალო სიდიდეებისაგან გადახრებისაგან. როგორც ყოველთვის ცედენტის წილი i-ურ რისკში გამოისახება შემდეგნაირად:

$$q_i = q\frac{\min(Z;S_i)}{S_i}$$

ამგვარად ცედენტის წილი მთელ აკრეფილ პრემიაში არის

$$\pi(Z;q) = q(m+\theta)\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z)$$

ცედენტის ჯამური წილი მომხდარ ზარალებში მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$L(Z;q) = q\sum_{i=1}^{N}\xi_i \min(S_i;Z)$$

ამგვარად $(Z;q)$ გადაზღვევის დროს ცედენტის ჯამური ფინანსური შედეგი არის

$$X(Z;q) = q(m+\theta)\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z) - q\sum_{i=1}^{N}\xi_i \min(S_i;Z) = q\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z)(m+\theta-\xi_i), \qquad (5.\ 1)$$

ცხადია

$$EX(Z;q) = q\theta\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z), \qquad (5.\ 2)$$

$$VarX(Z;q) = q^2\sigma^2\sum_{i=1}^{N}\min{}^2(S_i;Z). \qquad (5.\ 3)$$

გადაზღვევის “ხარისხის” შესაფასებლად გამოვიყენოთ ე. წ. გაკოტრების ალბათობა

$$\mathrm{P}(X(Z;q) < b) = \Psi_{Z;q}(b)\ , \qquad (5.\ 4)$$

სადაც b არის ცედენტის მიერ შერჩეული ზღვარი, რომლის ქვევითაც მისი ჯამური ფინანსური შედეგის მოხვედრა მზღვეველისთვის არასასურველია. ჩვენი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი მოცემული b-თვის ვიპოვოთ ისეთი

Z, $[S_1,...,S_N]$ შუალედში, რომლის დროსაც $\Psi_{Z;q}(b)$ ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ $X(Z;q)$ სიდიდის ნორმალური აპროქსიმაცია: თუ (5. 1)-თვის შესრულებულია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის პირობები, მაშინ

$$\frac{X(Z;q)-q\theta\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z)}{q\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\min^2(S_i;Z)}} \sim N(0;1)$$

სხვა სიტყვებით,

$$\Psi_{Z;q}(b)=\Phi\left(\frac{b-q\theta\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z)}{q\sigma\sqrt{\sum_{i-1}^{N}\min^2(S_i;Z)}}\right) \qquad (5.\ 5)$$

სადაც $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია. ვინაიდან $\Phi(x)$ ზრდადი ფუნქციაა საძიებელი Z იქნება ის, რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას მიანიჭებს მის არგუმენტს (5. 5)-ში.

ამგვარად, საბოლოოდ ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი $Z\in[S_1,...,S_N]$, რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს

$$f(Z;q;b)=\frac{b-q\theta\sum_{i=1}^{N}\min(S_i;Z)}{q\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\min^2(S_i;Z)}} \qquad (5.\ 6)$$

ფუნქციას. ასეთი Z-ის მოსაძებნად მივმართოთ წინა პარაგრაფებში ნაცად ხერხს. ანუ $f(Z;q;b)$ განვიხილოთ ყოველ $S_{k-1}\le Z\le S_k$ შუალედში. გვაქვს:

$$f(Z;q;b)=\frac{b-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i+Z(N-k+1)\right)}{q\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)}}\quad ,\qquad \text{თუ}\qquad S_{k-1}\le Z\le S_k$$

გავაწარმოოთ $f(Z;q;b)$ ფუნქცია Z-ით და გავუტოლოთ წარმოებული 0-ს. გვაქვს

$$\left(\frac{b-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i+Z(N-k+1)\right)}{q\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)}}\right)'=$$

$$=\frac{-q^2\theta(N-k+1)\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)}-\dfrac{2q\sigma Z(N-k+1)\left(b-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i+Z(N-k+1)\right)\right)}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)}}}{q^2\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)\right)}=0$$

$$-q^2\theta(N-k+1)\sigma\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)\right)-q\sigma Z(N-k+1)\left(b-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i+Z(N-k+1)\right)\right)=0$$

$$-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2+Z^2(N-k+1)\right)-Z\left(b-q\theta\left(\sum_{i=1}^{k-1}S_i+Z(N-k+1)\right)\right)=0$$

$$-q\theta\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2-q\theta Z^2(N-k+1)-bZ+Zq\theta\sum_{i=1}^{k-1}S_i+q\theta Z^2(N-k+1)=0$$

$$Z_k=\frac{q\theta\sum_{i=1}^{k-1}S_i^2}{q\theta\sum_{i=1}^{k-1}S_i-b}\tag{5. 7}$$

ამგვარად, (5. 6)-ით მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობის საპოვნად მასში Z-ის მაგივრად თანმიმდევრობით უნდა ჩავსვათ ყველა S_i და ის Z_k-ები, რომლებიც მოთავსებულია $[S_{k-1};S_k]$ შუალედში. მიღებული სიდიდეებისაგან უმცირესი, იქნება (5. 6)-ის

უმცირესი მნიშვნელობა. ისევე, როგორც წინა პარაგრაფებში ამოცანის ამოხსნის ამ ეტაპზე ჩვენ გამოვიყენებთ *Excel*-ის ცხრილებს, რაც საშუალებას მოგვცემს ამოხსნა ბოლომდე მივიყვანოთ.

ამ ცხრილების გამოსავალი ფორმების მაგალითები მოყვანილია დანართში. იხილეთ ცხრილები (5.1) – (5.3). საილუსტრაციოდ ამ ცხრილების შედგენისას ჩვენ ჩავთვალეთ, რომ ξ_i შემთხვევით სიდიდეებს აქვთ შემდეგი განაწილება

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0.9 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix}$$

ასეთ შემთხვევაში ვღებულობთ, რომ $m = 0.066$ და $\sigma = 0.2071$. ამგვარად (5.1)—(5.3) ცხრილებში აღებული გვაქვს $\theta = 0.034-$ის ტოლი ($m-$ის 50%), $\sigma = 0.2$ და $q = 0.4$. ამ ცხრილებში განსხვავებულია მხოლოდ b თანხა. ამოხსნის შედეგები წარმოდგენილია ბოლო ორ სვეტში. კერძოდ (5.1) ცხრილში ჩვენი ამოცანაა თავიდან ავირიდოთ "კატასტროფა" ($b = -10000$). შესაბამისი მოდელი გვირჩევს, რომ გადაზღვევა უმდაბლეს დონეზე დავაყენოთ $Z = S_1$ და გვაცნობებს, რომ ასეთ შემთხვევაში გაკოტრების ალბათობა ძალზედ დაბალი იქნება, დაახლოებით 0.02-ის ტოლი. (5.2) ცხრილში წარმოდგენილია ის შემთხვევა, როდესაც მზღვეველი არ მოელის პორტფელიდან მოგებას და თანახმაა, რომ ამ პორტფელმა მხოლოდ თავისი თავი შეინახოს ($b = 1000$). მოდელი გვირჩევს, რომ გადაზღვევა დაახლოებით 60000-ის დონეზე დავაყენოთ და გვპირდება, რომ ასეთ შემთხვევაში გაკოტრების ალბათობა 0.137-ის ტოლი იქნება და ბოლოს ცხრილ (5. 3)-ში ცედენტი ფიქრობს პორტფელიდან გარკვეული მოგების მიღებას ($b = 30000$). ამ მაგალითში მოდელი

ამბობს, რომ საუკეთესო ქცევა იმაში მდგომარეობს, რომ ზღვარი კვოთურ გადაზღვევასა და სურპლასს შორის დაახლოებით 376000-ის დონეზე დავაყენოთ და გაკოტრების ალბათობა ასეთ შემთხვევაში 0.22-ის ტოლი იქნება. ტერმინი გაკოტრება ამ შემთხვევაში ნიშნავს უბრალოდ იმას, რომ შემოსავალი 30000-ზე ნაკლები იქნება.

ცხადია ეს მოდელი სხვა საშუალებებსაც იძლევა. კერძოდ: შესაძლებელია ξ_i შემთხვევითი სიდიდეების სხვადასხვა ვარიანტების განხილვა და |შესაბამისი ანალიზის გაკეთება.

6. შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

1) შემუშავებულია პროპორციული წესით გადაზღვეული სადაზღვევო პორტფელის დეტერმინისტული მოდელი, რომლის საფუძველზეც შემუშავებულია მრავალი გასული წლის რეტროსპექტიული ანალიზის მეთოდი. ჩამოყალიბებულია შესაბამისი გამოთვლითი პროცედურა *Excel*-ის ცხრილებში. გადაზღვევის “ხარისხის“ შესაფასებლად გამოყენებულია, როგორც პირდაპირი მზღვევლის უშუალო ფინანსური შედეგი, ასევე ამ შედეგების სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობები.

2) შემუშავებულია პროპორციული წესით გადაზღვეული სადაზღვევო პორტფელის სტოქასტური მოდელი, რომლის საფუძველზეც შექმნილია ისეთი პროპორციული

გადაზღვევის შერჩევის მეთოდი, რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს გაკოტრების ალბათობას. შემუშავებულია შესაბამისი გამოთვლითი პროცედურა და წარმოდგენილია *Excel*-ის ცხრილები, რომელთა მეშვეობითაც შესაძლებელია რიცხვითი შედეგების მიღება.

3) ნაშრომის შედეგები წარმოდგენილია დისკეტაზე *Excel*-ის პროგრამის სახით, რომელთა გამოყენება შესაძლებელია პრაქტიკულ საქმიანობაში.

-

ლიტერატურა

[1] ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მირზაშვილი, თ, ტორონჯაძე, ო. ღლონტი, ლ ჯამბურია. "ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები" გამომცემლობა: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი საქართველოს სტატისტიკური ასოციაცია ფონდი "ევრაზია" 1999წ.

[2] В. Г. Измайлов. Метод создания оптимальной перестраховочной программы. Страховое Дело №5, 2002

[3] В. Г. Измайлов . Определение оптимальных условий квотного договора перестрахования. Страховое Дело №11, 2000