საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

დოლაკიძე ივეტა რეზოს ასული

"გარდამავალ პერიოდში დაფუძნებული საპენსიო სქემის გათვლა"

სპეციალობა – 01.02.09. გამოყენებითი მათემატიკა

დისერტაცია

მაგისტრის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად

კათედრა: № 104 გამოყენებითი მათემატიკა

ხელმძღვანელი დოც. გ. მირზაშვილი.

თბილისი
2003

სარჩევი:

1. ამოცანის დასმა

დღესდღეობით მრავალ ქვეყანაში მიმდინარეობს საპენსიო რეფორმა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ხდება სოლიდარობის პრინციპზე დაფუძნებული საპენსიო სისტემების ჩანაცვლება ფონდირების პრინციპზე აგებული სისტემებით.

სოლიდარობის პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში: შრომისუნარიანი ადამიანები საერთო ფონდში აგროვებენ თანხებს, რომლებიც “მაშინვე” ხმარდება შრომისუუნარო ადამიანებს პენსიის სახით.

ფონდირების პრინციპი ითვალისწინებს იმას, რომ ყოველი ადამიანისთვის იქმნება მისი საკუთარი ფონდი ანუ მის პირად ანგარიშზე წლების განმავლობაში იქმნება დანაგროვი. საპენსიო ასაკის მიღწევის შემდეგ ეს პიროვნება იყენებს თავის დანაგროვს პენსიის სახით.

ამგვარი რეფორმის ჩატარება გარდამავალ პერიოდში მყოფ ქვეყნებში დამატებით სირთულეებს აწყდება, ვინაიდან ასეთ ქვეყნებში (მაგ. საქართველოში) ძველი საპენსიო სისტემა მთლიანად მოშლილია, ხოლო ახალი საპენსიო სისტემა ვერ უზრუნველყოფს შედარებით ხანში შესული ადამიანების ჯეროვან პენსიას, დაგროვების პერიოდის სიმცირის გამო. მაგ. იმისათვის, რომ 25 წლის ახალგაზრდას და 55 წლის ადამიანს ქონდეთ ერთიდაიგივე საპენსიო უზრუნველყოფა დაწყებული 65 წლის ასაკიდან, ამ უკანასკნელის ყოველი საპენსიო შენატანი 20-ჯერ უნდა აღემატებოდეს ახალგაზრდის შესაბამის შენატანს. ე. ი. შედარებით ხანში შესულმა ადამიანმა ან უნდა შეიტანოს

საკმაოდ დიდი შენატანები, ან დასჯერდეს ძალზედ მცირე პენსიას.

ეს პრობლემა რეალურად წამოიჭრა ყველა პოსტ-სოციალისტურ ქვეყანაში და მისი გადაჭრა მთელი სახელმწიფოს მასშტაბით ძალზედ რთული აღმოჩნდა.

ამავე დროს იგივე პრობლემის გადაჭრა გაცილებით უფრო ადვილია თუ საქმე გვაქვს ცალკეულ საწარმოსთან ან მსხვილ დაწესებულებასთან, სადაც დამქირავებელი თავისი დაქირავებულებისთვის ქმნის ე. წ. დამქირავებლის საპენსიო სქემას. ამგვარი სქემების წარმატებული ფუნქციონირების მაგალითები მრავალ ქვეყანაში (მათ შორის საქართველოშიც, ეროვნული ბანკი) არსებობს.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში, დამქირავებლის საპენსიო სქემაში ზემოთ ხსენებული პრობლემის გადასაჭრელად წარმოდგენილია ორი მიდგომა და შესაბამისი მათემატიკური მოდელები.

პირველი მოდელის ფარგლებში განხილულია შერეული ტიპის საპენსიო სქემა, რომელშიც ყოველი დაქირავებულისთვის იქმნება პირადი დანაგროვები და ამავე დროს მოქმედებს გარკვეული სოლიდარობის პრინციპიც – ახალგაზრდები ეხმარებიან შედარებით ასაკოვან ადამიანებს. ეს იმაში გამოიხატება, რომ ყველა დაქირავებული ასაკის მიუხედავად აკეთებს ერთდაიგივე საპენსიო შენატანებს და უზრუნველყოფილი იქნება ერთიდაიგივე პენსიით. ცხადია ამ დროს ახალგაზრდებს უწევს უფრო დიდი შენატანების შეტანა, ვიდრე მათ საკუთარი თავისთვის ჭირდებათ, ხოლო ასაკოვანებს შეაქვთ ნაკლები ვიდრე საჭიროა იმ საპენსიო უზრუნველყოფისათვის, რომელსაც ისინი მიიღებენ

მომავალში. ამ მოდელის ფარგლებში ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ განისაზღვროს საჭირო საერთო საპენსიო შენატანის სიდიდე და შეფასდეს ასეთი მიდგომის ეფექტურობა.

მეორე მოდელი წარმოადგენს სულ სხვა მიდგომას, რომლის მიხედვითაც თვითონ საწარმო ან დაწესებულება საკუთარი სახსრებიდან ახდენს იმ დანაკლისის კომპენსირებას, რომელიც ჩნდება შედარებით ასაკოვანი დაქირავებულების საპენსიო უზრუნველყოფაში წინასწარ დაწესებული სტანდარტული საპენსიო შენატანების პირობებში. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ დამქირავებლის კეთილი ნების ამგვარი გამოხატვის მაგალითები არსებობს და დამქირავებელს წინასწარ ყოველთვის აინტერესებს ორი საკითხი:

1) რა ხნის განმავლობაში მოუწევს მას დამატებითი საპენსიო შენატანების გაკეთება (რა დროის განმავლობაში უნდა იმოქმედოს ე. წ. საკომპენსაციო გეგმამ, რათა უზრუნველყოფილი იყოს ყველა არსებული ასაკოვანი დაქირავებული) და
2) რა სიდიდის უნდა იყოს ეს დამატებითი შენატანები?

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ზემოთ მოყვანილი მოდელები და ამოხსნილია დასმული ამოცანები.

2. მოდელი I – შერეული საპენსიო სქემა.

წარმოვიდგინოთ რაიმე დაწესებულება, რომელიც აყალიბებს კერძო საპენსიო სქემას. ცნობილია თანამშრომელთა ასაკობრივი სტრუქტურა და ვიყენებთ გარკვეულ მოკვდავობის ცხრილს.

ასევე ვგულისხმობთ, რომ მოქმედებს მუდმივი წლიური საპროცენტო განაკვეთი. სიმარტივისათვის განხილულია ის შემთხვევა, როდესაც საპენსიო შენატანი ხორციელდება ერთჯერადად, ხოლო საბოლოოდ ყოველი პიროვნების საპენსიო ფონდმა უნდა შეადგინოს ერთი პირობითი ფულადი ერთეული (ანუ საპენსიო შენატანი გამოითვლება, როგორც საბოლოო ერთეულოვანი საპენსიო ფონდის მოცულობის წილი)

შემოვიღოთ აღნიშვნები: x_i-ები, $i=1,2,...,n$, არის ასაკები, რომლებიც დალაგებულია ზრდადობის მიხედვით. α_i არის რაოდენობა x_i ასაკში მყოფი ადამიანის. $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Δ_i-არის x_i ასაკში მყოფი ადამიანის დარჩენილი სრული წლების რაოდენობა საპენსიო ასაკამდე. $r-$არის წლიური საპროცენტო განაკვეთი. $v=\dfrac{1}{1+r}$ არის დისკონტირების კოეფიციენტი. $\gamma_i=\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$; $\beta_i=\gamma_i\cdot v^{\Delta_i}$; ამასთან Δ_i-ები დალაგებულია კლებადობის მიხედვით. ${}_n p_x$ არის ალბათობა იმისა, რომ x ასაკში მყოფი პიროვნება მიაღწევს $(x+n)$ ასაკს და შესაბამისად ${}_n q_x=1-{}_n p_x$ არის ალბათობა იმისა, რომ ვერ მიაღწევს $(x+n)$ ასაკს. A_i წარმოადგენს x_i ასაკში მყოფი პიროვნების მინიმალურ ნეტო-პრემიას ანუ სადაზღვევო შენატანს, რომელიც საშუალოდ უზრუნველყოფს ერთეულოვან საპენსიო დანაგროვს

$$\mathrm{A}_i={}_{\Delta_i}p_{x_i}\cdot v^{\Delta_i} \qquad (2.\ 1)$$

სოლიდარობის პრინციპის ჩარევას ამ სისტემაში გამოვხატავთ იმით, რომ ყველა ასაკის ადამიანს დავაკისრებთ ერთდაიგივე X_0 საპენსიო შენატანს, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი

წინადადება 2.1

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_i \qquad (2.\ 2)$$

დამტკიცება: დავუშვათ ყველა ასაკის ადამიანს დავაკისრეთ ერთიდაიგივე X_0 საპენსიო შენატანი, მაშინ პირველ წელს საპენსიო ფონდში იქნება $(X_0 \cdot \alpha)$ თანხა. რადგან X_0-ის გადახდა უზრუნველყოფს მთელი ამ კოლექტივის პენსიას, მაშინ;

$$X_0 \cdot \alpha = \alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot {}_{\Delta_{n-1}} p_{x_{n-1}} \cdot \nu^{\Delta_{n-1}} + \alpha_{n-2} \cdot {}_{\Delta_{n-2}} p_{x_{n-2}} \cdot \nu^{\Delta_{n-2}} + \ldots + \alpha_1 \cdot {}_{\Delta_1} p_{x_1} \cdot \nu^{\Delta_1}$$

$$X_0 = \frac{\alpha_n}{\alpha} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} \mathrm{A}_{n-1} + \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha} \mathrm{A}_{n-2} + \ldots + \frac{\alpha_1}{\alpha} \mathrm{A}_1$$

ანუ

$$X_0 = \gamma_n + \gamma_{n-1} \cdot \mathrm{A}_{n-1} + \gamma_{n-2} \cdot \mathrm{A}_{n-2} + \ldots + \gamma_1 \cdot \mathrm{A}_1$$

ე.ი

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_i$$

რ. დ. გ.

როგორც ვხედავთ X_0 წარმოადგენს A_{x_i} გადასახადების შეწონილ საშუალოს.

გასაგებია, რომ X_0 მეტია ახალგაზრდების ერთჯერად მინიმალურ ნეტო-პრემიებზე და ნაკლებია ხანში შესული ადამიანების ერთჯერად შენატანებზე. განვიხილოთ მაგალითი.

x_i	25	30	35	40	45	50	55
α_i	7	5	7	4	3	2	2
A_i	0.01637	0,0267	0.043	0.07017	0.1159	0.1914	0.323
	$i=1,2,\ldots,7$		$r=10\%$				
		X_0=0.0735					

ცხრილი 2.1

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ სოლიდარობის პრინციპი არის კიდევ დროში გაწელილი, ანუ წარმოვიდგინოთ, რომ პენსიაზე გასულების მაგივრად შემოგვყავს იგივე რაოდენობის x_1 ასაკში მყოფი ახალგაზრდები და ამ სოლიდარობის პრინციპს ვავრცელებთ ამ გაფართოებულ კოლექტივზე. გამოვიყვანეთ იმ X_1 ერთჯერადი შენატანის გამოსათვლელი ფორმულა, რომელიც უნდა გადაიხადოს ყველა წევრმა კოლექტივიდან და კიდევ იმ x_1 ასაკის ახალგაზრდებმა, რომლებიც შემოვიდნენ პირველად, პენსიაში გასულთა სანაცვლოდ.

წინადადება 2.2

$$X_1 = \frac{\beta_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i}}{\beta_n + 1} \qquad (2.\ 3)$$

დამტკიცება: ვიყენებთ იგივე პირობებს და მსჯელობას, რომელიც გამოვიყენეთ (2. 2) ფორმულის დასამტკიცებლად. ვუშვებთ, რომ X_1 საპენსიო შენატანს ვახდევინებთ ყველა ასაკის ადამიანს და კიდევ იმ ახალგაზრდებს, რომლებიც შემოდიან პირველად პენსიაში გასულების სანაცვლოდ, მაშინ პირველ წელს საპენსიო ფონდში შევა $(\alpha \cdot X_1)$ თანხა, ხოლო მეორე წელს საპენსიო ფონდს შეემატება $(\alpha_n \cdot X_1)$ თანხა. ე.ი. Δ_n წლის შემდეგ საპენსიო ფონდში იქნება $\left(\alpha \cdot X_1 \cdot (1+i)^{\Delta_n} + \alpha_n \cdot X_1\right)$ თანხა. რადგან X_1-ის ყველას მიერ გადახდა უზრუნველყოფს მთელ ამ კოლექტივს და კიდევ იმ ახალგაზრდებს, რომლებიც შემოვიდნენ პირველად პენსიაში გასულების სანაცვლოდ მაშინ;

$$\alpha \cdot X_1 (1+i)^{\Delta_n} + \alpha_n \cdot X_1 = \alpha_n \cdot {}_{\Delta_n} p_{x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot {}_{\Delta_n} p_{x_i} \cdot \mathrm{A}_{x_i+\Delta_n} + \alpha_n \cdot \mathrm{A}_{x_1}$$

$$X_1 = \frac{\alpha_n \cdot {}_{\Delta_n} p_{x_n} + \alpha_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot {}_{\Delta_n} p_{x_i} \cdot \nu^{\Delta_i - \Delta_n} \cdot {}_{\Delta_i - \Delta_n} p_{x_i+\Delta_n}}{\alpha_n + \alpha (1+i)^{\Delta_n}} =$$

$$= \frac{\alpha_n \cdot {}_{\Delta_n} p_{x_n} + \alpha_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot \mathrm{A}_{x_i} \cdot (1+i)^{\Delta_n}}{\alpha_n + \alpha \cdot (1+i)^{\Delta_n}} =$$

$$= \frac{\gamma_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i} \cdot (1+i)^{\Delta_n}}{\gamma_n + (1+i)^{\Delta_n}}$$

ე. ი.

$$X_1 = \frac{\gamma_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} \cdot \nu^{\Delta_n} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i}}{1 + \gamma_n \cdot \nu^{\Delta_n}}$$

ანუ

$$X_1 = \frac{\beta_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i}}{\beta_n + 1}$$

რ. დ. გ.

თუ ორი თაობით გავაახალგაზრდავებთ კოლექტივს და ამ გაფართოებულ კოლექტივს დავაკისრებთ ერთსადაიგივე X_2 გადასახადს, მაშინ X_1-ის გამოთვლისას ჩატარებული მსჯელობის მსგავსად მივიღებთ X_2-ის დასათვლელ ფორმულასაც, რომელსაც აქვს სახე:

$$X_2 = \frac{\beta_n \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \beta_{n-1} \cdot \mathrm{A}_{x_1} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i}}{\beta_n + \beta_{n-1} + 1} \qquad (2.\ 4)$$

ანალოგიურად, როდესაც კოლექტივს გავაახალგაზრდავებთ k ცალი თაობით, გაფართოებულ კოლექტივზე დაკისრებული გადასახადი X_k გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$X_k = \frac{\mathrm{A}_{x_1} \cdot \sum_{i=n-k+1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_{x_i}}{\sum_{i=n-k+1}^{n} \beta_i + 1} \quad , \qquad k = 0,1,2,\dots,n \qquad (2.\ 5)$$

X_0 არის X_k-ს კერძო შემთხვევა. თუ (2. 5) ფორმულაში ჩავთვლით $k = 0$ და რომ $\sum_{i=n+1}^{n} \beta_i = 0$ და დაგვრჩება $X_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \mathrm{A}_i$

ანალოგიურად თუ $k = 1$ მივიღებთ (2. 3) ფორმულას და თუ $k = 2$ მივიღებთ (2. 4) ფორმულას.

როგორც ვხედავთ, X_k-ები შეწონილი საშუალოებია.

თუ $k=0$, მაშინ წონებია γ_i-ები $i=1,2,...,n$.

თუ $k=1$, მაშინ წონებია $\frac{\beta_n+\gamma_1}{\beta_n+1};\frac{\gamma_2}{\beta_n+1};...;\frac{\gamma_n}{\beta_n+1}$.

თუ $k=2$, მაშინ წონებია $\frac{\beta_{n-1}+\beta_n+\gamma_1}{\beta_{n-1}+\beta_n+1};\frac{\gamma_2}{\beta_{n-1}+\beta_n+1};...;\frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}+\beta_n+1}$

ზოგადად k-სთვის წონებია $\frac{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+\gamma_1}{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+1};\frac{\gamma_2}{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+1}; ...;\frac{\gamma_n}{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+1}$.

წინადადება 2.3 A_{x_1}-ის წონა იზრდება k-ს ზრდასთან ერთად ე.ი.

$$\frac{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+\gamma_1}{\sum_{i=n-k+1}^{n}\beta_i+1}>\frac{\sum_{i=n-k+2}^{n}\beta_i+\gamma_1}{\sum_{i=n-k+2}^{n}\beta_i+1} \qquad (2.\ 6)$$

დამტკიცება: შემოვიღოთ აღნიშვნა: k-ურ ნაბიჯზე წონები აღვნიშნოთ $p_1^k; p_2^k;...; p_n^k$ და შესაბამისად $(k-1)$ ნაბიჯზე $p_1^{(k-1)}; p_2^{(k-1)};...; p_n^{(k-1)}$

$$p_1^k=1-\sum_{j=2}^{n}p_j^k$$

და

$$p_1^{(k-1)}=1-\sum_{j=2}^{n}p_j^{(k-1)}$$

$$\sum_{j=2}^{n} p_j^k = \frac{\sum_{i=2}^{n} \gamma_i}{\sum_{i=n-k+1}^{n} \beta_i + 1} \qquad \text{და} \qquad \sum_{j=2}^{n} p_j^{(k-1)} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \gamma_i}{\sum_{i=n-k+2}^{n} \beta_i + 1}$$

როგორც ვხედავთ უკანასკნელ ტოლობებში მრიცხველები ერთმანეთის ტოლია, მნიშვნელები დადებითია და მარცხენა ტოლობაში მნიშვნელი მეტია მარჯვენა ტოლობის მნიშვნელზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\sum_{j=2}^{n} p_j^k < \sum_{j=2}^{n} p_j^{k-1}$$

და ამიტომ

$$p_1^k > p_1^{k-1}$$

რ. დ. გ.

X_k სულ უფრო უახლოვდება A_{x_1}-ს.

წინადადება 2.4 X_k მიმდევრობა არის მკაცრად კლებადი.

დამტკიცება: ამის დასამტკიცებლად გამოვიყვანეთ შემდეგი რეკურენტული ფორმულა, რომლიც მარტივად მიიღება (2. 5) - დან.

$$X_{k-1} - X_k = \frac{\beta_{n-k+1} \cdot \left(X_{k-1} - \mathrm{A}_{x_1}\right)}{\sum_{i=n-k+1} \beta_i + 1}, \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad (2.\ 7)$$

$\frac{\beta_{n-k+1}}{\sum_{i=n-k+1}^{n} \beta_i + 1} > 0$ და ასევე $X_{k-1} > \mathrm{A}_{x_1}$, ასე, რომ (2. 7) ტოლობის მარჯვენა მხარე არის დადებითი სიდიდე, რაც ნიშნავს, რომ $X_{k-1} > X_k$.

საინტერესოა, რომ ამ პროცესის დიდხანს გაგრძელება ნაკლებად ეფექტურია. ეფექტი გვაქვს მე-2, მე-3 ნაბიჯზე; ამას გვიჩვენებს ჩვენს მიერ განხილული რიცხვითი მაგალითიც.

$X_0 = 0.0735; \quad X_1 = 0.06821; \quad X_2 = 0.06747; \quad X_3 = 0.0668;$

$X_4 = 0.06621; \quad X_5 = 0.06561; \quad X_6 = 0.06538; \quad X_7 = 0.06515.$

3. მოდელი II – საკომპენსაციო გეგმა

ვარიანტი I

დავუშვათ საწარმოს თანამშრომელთა რაოდენობაა N. მათ შორის n_0 ის ადამიანებია , რომელიც სქემის დაფუძნების მომენტში საპენსიო ასაკისაა , n_1 არის იმ ადამიანების რაოდენობა , რომელსაც პენსიაში გასვლა მოუწევს სქემის დაფუძნების მომენტიდან ერთი წლის შემდეგ , n_2 - ის , რომელსაც პენსიაში გასვლა მოუწევს სქემის დაფუძნებიდან ორი წლის შემდეგ და ა. შ. საზოგადოდ, n_k იყოს იმ თანამშრომელთა რაოდენობა, რომლებსაც პენსიაში გასვლა უწევს სქემის დაფუძნებიდან k წლის შემდეგ და ამ ადამიანების ერთობლიობას დავარქვათ k – ური თაობა, $k \geq 0$

ამ მოდელში სიმარტივისათვის იგულისხმება, რომ N არის უცვლელი სიდიდე იმ პირობით, რომ პენსიაში გასულების სანაცვლოდ სქემაში ერთვებიან ისეთი ახალგაზრდები, რომლებიც

არ საჭიროებენ კომპენსაციას. აგრეთვე იგულისხმება $n_i > 0, i = 0,1,...,k$. საუბარია ვადიან პენსიაზე, სადაც პენსიის ვადას წარმოადგენს M წელი. ამ მოდელში გვაქვს კიდევ ასეთი შეზღუდვა: თუ სქემაში ჩართულმა პიროვნებამ მიაღწია საპენსიო ასაკს და იგი ცოცხალია, იგი აუცილებლად გადის პენსიაში და იმ შემთხვევაშიც კი თუ იგი გარდაიცვლება M წლის განმავლობაში მისი ოჯახი მიიღებს პენსიას M წლის მანძილზე. ჩვენ ვუშვებთ, რომ კომპესაციას საჭიროებს პენსიაში გამსვლელთა მხოლოდ პირველი $n_0, n_1,..., n_m$ თაობა სულ $(m+1)$ ცალი, რომელთაც განსაკუთრებულ თაობებს ვუწოდებთ.

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, თუ რა სიდიდის ყოველწლიური ერთნაირი თანხები (საკომპენსაციო პრემია) შეიტანოს საწარმოს ხელმძღვანელობამ საკომპენსაციო ფონდში და რამდენი წლის მანძილზე იმოქმედებს საკომპენსაციო ფონდი?

აღვნიშნოთ $\mathrm{T}^{j}_{a_p-k}$-ით k-ური თაობის j-ური წარმომადგენლის სრული დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა, სადაც a_p აღნიშნავს საპენსიო ასაკს, $j=1,2,..., n_k$. ჩავთვალოთ, რომ $\mathrm{T}^{j}_{a_p-k}$-ურთიერთ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: $Z_k(i)$- თ აღვნიშნოთ $k-$ ური თაობის n_k ინდივიდიდან i წლის შემდეგ ცოცხლად დარჩენილთა რაოდენობა;

$$Z_k(i) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{I}\{\mathrm{T}^{j}{}_{a_p-k} \geq i\} \quad . \qquad (3.\ 1)$$

ცხადია, რომ

$$Z_k(0) \equiv n_k$$

და

$$Z_k(k) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{I}\{\mathrm{T}_{a_p - k} \geq k\} \qquad (3.\ 2)$$

წარმოადგენს k – ური თაობის იმ ინდივიდების რაოდენობას, რომლებიც მიაღწევენ საპენსიო ასაკს.

ცხადია, რომ $Z_k(i)$ წარმოადგენს i- ს მიხედვით შემთხვევით სიდიდეთა არაზრდად მიმდევრობას. აქედან გამომდინარე ადრე თუ გვიან თვითოეულ თაობას დაუდგება მომენტი, როდესაც თაობაში აღარ დარჩებიან ცოცხალი ინდივიდები. ბუნებრივია ამ მომენტს თაობის გაქრობის მომენტი ვუწოდოთ.

k – ური თაობის გაქრობის მომენტი აღვნიშნოთ R_k- თი და განვმარტით შემდეგნაირად:

$$R_k = \min\{i : Z_k(i) = 0\}, \qquad i > 0 \qquad (3.\ 3)$$

გასაგებია, რომ $\{0 \leq R_k \leq k\}$ ხდომილების განხორციელება ნიშნავს, რომ k- ური თაობის ვერც ერთმა წარმომადგენელმა ვერ მიაღწია საპენსიო ასაკს (რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს თაობა არ საჭიროებს საკომპენსაციო უზრუნველყოფას). ასევე გასაგებია, რომ ამათუიმ თაობის ესათუის წარმომადგენელი საჭიროებს საკომპენსაციო უზრუნველყოფას თუ განხორციელდება $\{R_k > k\}$ ხდომილება. ამიტომ საკომპენსაციო ფონდის ანალიზისათვის

ჩვენ გვაინტერესებს არა თვით R_k არამედ შემდეგი სიდიდეები.

$$\tau_k = \begin{cases} R_k\,, & R_k \le k \\ k+M\,, & R_k > k \end{cases} \qquad (3.\ 4)$$

რომლის შინაარსი მდგომარეობს შემდგომში: ეს არის k- ური თაობის საკომპენსაციო სქემაში მონაწილეობის წლების რაოდენობა.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი შემთხვევითი სიდიდე:

$$\tau = \max \tau_k \quad , \quad 0 \le k \le m \qquad (3.\ 5)$$

რომელიც წარმოადგენს საკომპენსაციო ფონდის მოქმედების პერიოდს, როდესაც განსაკუთრებულ თაობათა რაოდენობაა $(m+1)$ ცალი.

ქვემოთ ჩვენ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ მთელი ამ პერიოდის განმავლობაში მოქმედებს r წლიური საპროცენტო განაკვეთი და შესაბამის დისკონტირების კოეფიციენტს ν- თი აღვნიშნავთ:

$$\nu = \frac{1}{1+r}$$

ახლა გადავიდეთ შემოღებული შემთხვევითი სიდიდეების ალბათური განაწილების დადგენაზე.

განვიხილოთ R_k შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება. როგორც აღვნიშნეთ R_k არის k- ური თაობის გაქრობის მომენტი.

წინადადება 3.1

$$P(R_k = z) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k} - {}_{z-1} q^{n_k}{}_{a_p-k}, \qquad (3.\ 6)$$

$$z = 1,2,\ldots,\omega - a_p + k + 1$$

სადაც ϖ არის ზღვრული ასაკი ანუ; ${}_{\varpi-x+1}q_x = 1$.

დამტკიცება:

$$P(R_k = z) = P\{Z_k(z) = 0 \quad \text{და} \quad Z_k(z-1) > 0\} =$$

$$= P\{Z_k(z) = 0 \quad \text{და} \quad \overline{Z_k(z-1) = 0}\} =$$

$$= P\{Z_k(z) = 0\} - P\{Z_k(z-1) = 0\}$$

თუ გამოვიყენებთ აქტუარულ აღნიშვნებს მაშინ:

$$P(R_k = z) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k} - {}_{z-1} q^{n_k}{}_{a_p-k},$$

რ. დ. გ.

(3. 6) - დან ვღებულობთ

$$P(R_k \le z) = \sum_{i=1}^{z} P(R_k = i) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k}, \qquad (3.\ 7)$$

$$z = 0,1,2,\ldots,\omega - a_p + k + 1$$

ახლა გამოვიყვანოთ τ_k შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება.

წინადადება 3.2

$$
\mathrm{P}(\tau_k = z) = \begin{cases} {}_z q^{n_k}_{a_p-k} - {}_{z-1} q^{n_k}_{a_p-k}\,, & z \le k \\ 0\,, & k < z < k+M \\ 1 - {}_k q^{n_k}_{a_p-k}\,, & z = k+M \\ 0\,, & z > k+M \end{cases} \qquad (3.\ 8)
$$

დამტკიცება: (3. 4) და (3. 6) ფორმულებიდან გამომდინარე:

$$
\mathrm{P}(\tau_k = z) = \mathrm{P}\{\tau_k = z, R_k \le k\} + \mathrm{P}\{\tau_k = z, R_k > k\} =
$$

$$
= \mathrm{P}\{R_k = z, R_k \le k\} + \mathrm{P}\{k+M = z, R_k > k\} =
$$

$$
= \mathrm{P}(R_k = z)\cdot I\{z \le k\} + \mathrm{P}(R_k > k)\cdot I\{z = k+M\} \qquad (3.\ 9)
$$

თუ (3. 9) –ში გავითვალისწინებთ (3. 6) და (3. 7), მივიღებთ (3. 8)

 რ. დ. გ.

(3. 8) –დან ვღებულობთ

$$
\mathrm{P}(\tau_k \le z) = \begin{cases} {}_z q^{n_k}_{a_p-k}\,, & z \le k \\ {}_k q^{n_k}_{a_p-k}\,, & k < z < k+M \\ 1\,, & z \ge k+M \end{cases} \qquad (3.\ 10)
$$

სხვანაირად:

$$
\mathrm{P}(\tau_k \le z) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k} \cdot I\{z \le k\} + I\{z > k\}\cdot \left({}_k q^{n_k}{}_{a_p-k}\right)^{I\{z<k+M\}} \qquad (3.\ 11)
$$

გამოვიყვანოთ τ შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება.

წინადადება 3.3 საკომპენსაციო ფონდის მოქმედების პერიოდი – τ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე;

$$P(\tau \le x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < M \\ \prod_{k=x-M+1}^{(x-1)\wedge m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k} \cdot \prod_{k=x}^{m} {}_x q_{a_p-k}^{n_k} \ , & M \le x < M+m \\ 1 \quad , & x \ge M+m \end{cases} \qquad (3.\ 12)$$

დამტკიცება:

$$P(\tau \le x) = P(\max \tau_k \le x) = \prod_{k=0}^{m} P(\tau_k \le x) \qquad (3.\ 13)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $x \le m$, მაშინ (3. 11) ფორმულის გათვალისწინებით (3. 13) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$P(\tau \le x) = \prod_{k=0}^{m} P(\tau_k \le x) = \prod_{k=0}^{x-1} \left({}_k q^{n_k}{}_{a_p-k} \right)^{I\{x<k+M\}} \cdot \prod_{k=x}^{m} {}_x q^{n_k}{}_{a_p-k} \qquad (3.\ 14)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $x > m$. (3. 11) – ის გათვალისწინებით (3. 13) ჩაიწერება ასე:

$$P(\tau \le x) = \prod_{k=0}^{m} P(\tau_k \le x) = \prod_{k=0}^{m} \left({}_k q^{n_k}{}_{a_p-k} \right)^{I\{x<k+M\}} \qquad (3.\ 15)$$

(3. 14) და (3. 15) ფორმულებში განვიხილოთ ორი შემთხვევა: პირველი, $M \le m$ და მეორე, $M > m$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა $M \le m$, მაშინ (3. 14) ფორმლა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$P(\tau \le x) = \begin{cases} 0\,, & x < M \\ \prod\limits_{k=x-M+1}^{x-1} {}_k q_{a_p-k}^{n_k} \cdot \prod\limits_{k=x}^{m} {}_x q_{a_p-k}^{n_k}\,, & M \le x \le m \end{cases} \qquad (3.\ 16)$$

და (3. 15) ფორმულა შემდეგნაირად:

$$P(\tau \le x) = \begin{cases} \prod\limits_{k=x-M+1}^{m} {}_k q_{a-k}^{n_k}\,, & m < x < m+M \\ 1\,, & x \ge m+M \end{cases} \qquad (3.\ 17)$$

(3. 16) და (3. 17) ფორმულები შეიძლება ჩაიწეროს ერთიანად. მივიღებთ:

$$P(\tau \le x) = \begin{cases} 0\,, & x < M \\ \prod\limits_{k=x-M+1}^{(x-1)\wedge m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k} \cdot \prod\limits_{k=x}^{m} {}_x q_{a_p-k}^{n_k}\,, & M \le x < M+m \\ 1\,, & x \ge M+m \end{cases} \qquad (3.\ 18)$$

აქ ვიყენებთ მიღებულ შეთანხმებას, რომ $\prod\limits_{a}^{b} = 1$, თუ $a > b$.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა $M > m.$, მაშინ (3. 14) მიიღებს სახეს:

$$P(\tau \le x) = 0 \qquad , \qquad x \le m \qquad (3.\ 19)$$

და (3. 15) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \begin{cases} 0\,, & m < x < M \\ \prod_{k=x-M+1}^{m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k}\,, & M \le x < M+m \\ 1\,, & x \ge M+m \end{cases} \qquad (3.\ 20)$$

აქაც შესაძლებელია (3. 19) და (3. 20) ჩაიწეროს ერთიანად. მივიღებთ:

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \begin{cases} 0, & x < M \\ \prod_{k=x-M+1}^{m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k}\,, & M \le x < M+m \\ 1\,, & x \ge M+m \end{cases} \qquad (3.\ 21)$$

თუ დავუკვირდებით დავინახავთ, რომ (3. 18) და (3. 21) ფორმულები ერთიდაიგივეა (კვლავ $\prod_{a}^{b} = 1$, $a > b$) ე. ი. შესაძლებელია (3. 21) ჩაიწეროს (3. 18) – ის სახით.

 რ. დ. გ.

მივიღეთ τ შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება. τ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$E\tau = \sum_{i=M}^{M+m} i \cdot \Big(\prod_{k=i-M+1}^{(i-1)\wedge m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k} \cdot \prod_{k=i}^{m} {}_i q_{a_p-k}^{n_k} - \prod_{k=i-M}^{(i-2)\wedge m} {}_k q_{a_p-k}^{n_k} \cdot \prod_{k=i-1}^{m} {}_{(i-1)} q_{a_p-k}^{n_k} \Big) \qquad (3.\ 22)$$

ალბათობები, რომელიც (3. 22)-ში მონაწილეობს თავისთავადაც მცირეა და ახარისხებული n_k ხარისხებში პრაქტიკულად ნულს

უტოლდება (თუ n_k რაოდენობები ძალზედ მცირე არ არის). ამიტომ (3. 22)-დან

$$E\tau = M + m$$

თუ (3. 22)-ის მსგავსად ამოვწერთ $Var\tau$-ს გამოსახულებას, ვნახავთ, რომ

$$Var\tau = 0.$$

ასე რომ ფაქტობრივად τ დეტერმინისტული სიდიდეა და

$$\tau = M + m$$

4. დაგროვების და ხარჯვის პროცესები

ვარიანტი I

როგორც აღვნიშნეთ ჩვენი ამოცანაა ასევე დავთვალოთ ყოველწლიური π საკომპენსაციო პრემია. დავუშვათ k- ური თაობის თვითოეული წარმომადგენლის წლიური "დეფიციტი" ანუ ის დანაკლისი, რომელიც აუცილებელია მისი "ნორმალური" საპენსიო უზრუნველყოფისათვის ერთი წლის განმავლობაში შეადგენს D_k სიდიდეს. ცხადია პირველი წელიწადის განმავლობაში საკომპენსაციო ფონდში უნდა იყოს $L_0 = n_0 \cdot D_0$ სიდიდის თანხა, იმისათვის, რომ უზრუნველვყოთ ნულოვანი თაობა ამ წელიწადის განმავლობაში. მომდევნო წელიწადში საჭიროა ნულოვან თაობასთან ერთად უზრუნველვყოთ ამ წელიწადს პენსიაში გასული თანამშრომლებიც, რომელთა რაოდენობაა $Z_1(1)$, ანუ ამ წელიწადში საჭირო თანხაა

$$L_1 = n_0 \cdot D_0 + Z_1(1) \cdot D_1$$

შემდეგ წელიწადს “ძველებთან” (ანუ წინა ორი თაობის პენსიონღებთან) ერთად ჩნდებიან ახალი პენსიონრები, რომელთა რაოდენობაა $Z_2(2)$ და ამიტომ ამ წელიწადში საჭირო თანხა შეადგენს

$$L_2 = n_0 \cdot D_0 + Z_1(1) \cdot D_1 + Z_2(2) \cdot D_2$$

თუ ამ მსჯელობას გავაგრძელებთ დავასკვნით, რომ $(i+1)$ წელიწადის განმავლობაში საკომპენსაციო უზრუნველყოფისათვის საჭირო თანხა შეადგენს სიდიდეს

$$L_i = \sum_{k=0 \vee (i-M+1)}^{m \wedge i} D_k \cdot Z_k(k) \quad , \qquad i = 0,1,\ldots,m+M-1 \qquad (4.\ 1)$$

თუ $i \geq m+M$, მაშინ $L_i = 0$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ თუ რა π სიდიდის საკომპენსაციო პრემია უნდა შეიტანოს საწარმომ ყოველი სადაზღვევო წლის დასაწყსში, ერთ - ერთი გზაა მთელი ამ პერიოდის განმავლობაში გამოვყოთ შენატანების და ხარჯვის პროცესები. შევადაროთ საკომპენსაციო ფონდის შემოსავლები და გასავლები, ამისათვის საჭიროა ყველა ფულადი სიდიდეები დავიყვანოთ ერთსა და იმავე დროის მომენტზე. ბუნებრივია ეს იყოს საპენსიო სქემის დაფუძნების მომენტი. მაშინ ცხადია, რომ საკომპენსაციო ფონდის ჯამური გასავლის დღევანდელი ღირებულება შეადგენს სიდიდეს:

$$B = \sum_{i=0}^{\tau-1} \nu^i L_i = \sum_{i=0}^{m+M-1} \nu^i L_i \ , \qquad (4.\ 2)$$

ხოლო საკომპენსაციო ფონდში შესული ჯამური თანხის იგივე მომენტისათვის გაანგარიშებული ღირებულებაა

$$A = \pi \sum_{i=0}^{\tau-1} \nu^i \ . \qquad (4.\ 3)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ თანხების როგორც შეტანა, ასევე გაცემა ხდება ყოველი სადაზღვევო წლის დასაწყისში.

როგორც ვხედავთ A და B შემთხვევითი სიდიდეებია.

5. საკომპენსაციო წმინდა ნეტო-პრემიის გამოსათვლელი ფორმულა

ვარიანტი I

$Z_k(k)$-ს, (რომელიც არის k-ურ თაობაში საპენსიო ასაკამდე ცოცხლად მიღწეულთა რაოდენობა) აქვს ბინომური განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლებია;

$$EZ_k(k) = {}_k p_{a_p - k} \cdot n_k$$

$$VarZ_k(k) = {}_k p_{a_p - k} \cdot {}_k q_{a_p - k} \cdot n_k$$

შევნიშნოთ, რომ თუ n_k- ები საკაოდ დიდი რიცხვებია, მაშინ შესაძლებელია ბინომური $Z_k(k)$ შემთხვევითი სიდიდის ნორმალურით აპროქსიაცია. ჩვენ შემთხვევაში ჩავთვალოთ, რომ n_k- ები დიდი რიცხვებია ე. ი. $Z_k(k)$ განაწილებულია ნორმალურად შემდეგი პარამეტრებით; $EZ_k(k)$ და $VarZ_k(k)$.

$$Z_k(k) \sim N\left({}_k p_{a_p-k} \cdot n_k ; {}_k p_{a_p-k} \cdot {}_k q_{a_p-k} \cdot n_k\right) \qquad (5.\ 1)$$

რადგან (4. 1) – ით განმარტებული L_i წარმოადგენს დამოუკიდებელი ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეების წრფივ კომბინაციას, ამიტომ ის თვითონაც ნორმალურია შემდეგი პარამეტრებით; EL_i და $VarL_i$.

$$EL_i = \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot EZ_k(k) = \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot {}_k p_{a_p-k} \cdot n_k$$

$$VarL_i = \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k{}^2 VarZ_k(k) = \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k^2 \cdot {}_k p_{a_p-k} \cdot {}_k q_{a_p-k} \cdot n_k$$

ე . ი.

$$L_i \sim N\left(\sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot {}_k p_{a_p-k} \cdot n_k ; \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k^2 \cdot {}_k p_{a_p-k} \cdot {}_k q_{a_p-k} \cdot n_k\right) \qquad (5.\ 2)$$

განმარტების თანახმად π საკომპენსაციო პრემია იქნება, წმინდა ნეტო-პრემია თუ იგი დააკმაყოფილებს შემდეგ ექვივალენტობის პრინციპს:

$$EA = EB \qquad (5.\ 3)$$

სხვა სიტყვებით π არის წმინდა ნეტო-პრემია თუ:

$$\pi = \frac{EB}{E\sum_{i=0}^{\tau-1} v^i} \qquad (5.\ 4)$$

გვაქვს

$$EB = \sum_{i=0}^{m+M-1} v^i EL_i = \sum_{i=0}^{m+M-1} v^i \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot {}_k p_{a_p-k} \cdot n_k \qquad (5.\ 5)$$

და

$$EA=\pi\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}\mathrm{P}(\tau\ge i+1)=\pi\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}\left(1-\mathrm{P}(\tau<i+1)\right)=$$

$$=\pi\left(\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}-\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}\cdot\mathrm{P}(\tau\le i)\right)= \qquad =$$

$$=\pi\left(\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu}-\sum_{i=M}^{M+m-1}(\nu^{i}\cdot\prod_{k=i-M+1}^{(i-1\wedge m)}{}_{k}q^{n_k}{}_{a_p-k}\cdot\prod_{k=i}^{m}{}_{i}q^{n_k}_{a_p-k})\right) \qquad (5.\ 6)$$

(5. 4), (5. 5) და (5. 6) ფორმულების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\pi=\frac{\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}\sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i}D_{k\ k}\,p_{a_p-k}\cdot n_k}{\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu}-\sum_{i=M}^{M+m-1}(\nu^{i}\cdot\prod_{k=i-M+1}^{(i-1)\wedge m}{}_{k}q^{n_k}_{a_p-k}\cdot\prod_{k=i}^{m}{}_{i}q^{n_k}_{a_p-k})} \qquad (5.\ 7)$$

მიღებული ფორმულიდან ჩანს, რომ დიდი ორგანიზაციებისათვის (დიდი n_k -ები)

$$\pi=\frac{\sum_{i=0}^{M+m-1}\nu^{i}\sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i}D_{k\ k}\,p_{a_p-k}\cdot n_k}{\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu}} \qquad (5.\ 8)$$

6. საკომპენსაციო გეგმა

ვარიანტი II

განსხვავება პირველ და მეორე ვარიანტებს შორის მდგომარეობს შემდგომში: პირველ ვარიანტში აღვნიშნეთ: თუ სქემაში ჩართულმა პიროვნებამ მიაღწია საპენსიო ასაკს და იგი ცოცხალია მისი ოჯახი იღებს პენსიას M წლის განმავლობაში მიუხედავად დაზღვეულის შესაძლო გარდაცვალებისა ამ პერიოდის განმავლობაში. მეორე ვარიანტში კი იგულისხმება, რომ თუ პიროვნებამ მიაღწია საპენსიო ასაკს და იგი ცოცხალია მიიღებს პენსიას და თუ გარდაიცვალა M წლის განმავობაში, გარდაცვალების მომენტში უწყდება პენსია.

ამოცანა კვლავ იმაში მდგომარეობს თუ რა სიდიდის ერთნაირი თანხები (საკომპენსაციო პრემია) შეიტანოს საწარმოს ხელმძღვანელობამ საკომპენსაციო ფონდში და რამდენი წელი იფუნქციონირებს საკოპენსაციო ფონდი.

კვლავ

$$Z_k(i)=\sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{I}\{\mathrm{T}^{j}{}_{a_p-k} \geq i\} \quad . \qquad (6.\ 1)$$

და

$$R_k = \min\{i : Z_k(i)=0\}, \quad i>0 \qquad (6.\ 2)$$

არის k-ური თაობის გაქრობის მომენტი. როგორც პირველ მოდელში აღვნიშნეთ ამათუიმ თაიბის ესათუის წარმომადგენელი საჭიროებს კომპენსაციას თუ განხორციელდა $\{R_k > k\}$ ხდომილება. ამჯერად k-ური თაობის საკომპენსაციო გეგმაში მონაწილეობის პერიოდი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\tau_k = \begin{cases} R_k, & R_k \le k+M \\ \\ k+M, & R_k > k+M \end{cases} \qquad (6.\ 3)$$

და

$$\tau = \max \tau_k \quad , \quad 0 \le k \le m \qquad (6.\ 4)$$

წარმოადგენს საკომენსაციო ფონდის ფუნქციონირების ხანგრძლივობის პერიოდს, როდესაც განსაკუთრებულ თაობათა რაოდენობაა $(m+1)$ ცალი.

ახლა გადავიდეთ შემოღებული შემთხვევითი სიდიდეების ალბათურ განაწილებაზე. როგორც პირველ ვარიანტში განვიხილეთ

$$\mathrm{P}(R_k = z) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k} - {}_{z-1} q^{n_k}{}_{a_p-k}, \qquad (6.\ 5)$$

$$z = 1,2,\ldots,\omega - a_p + k + 1$$

და

$$\mathrm{P}(R_k \le z) = \sum_{i=1}^{z} \mathrm{P}(R_k = i) = {}_z q^{n_k}{}_{a_p-k}, \qquad (6.\ 6)$$

$$z = 0,1,2,\ldots,\omega - a_p + k + 1$$

გამოვიყვანოთ τ_k შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება.

წინადადება 6.1

$$\mathrm{P}(\tau_k = z) = \begin{cases} {}_z q_{a_p-k}^{n_k} - {}_{z-1} q_{a_p-k}^{n_k}, & z < k+M \\ 1 - {}_{k+M-1} q_{a_p-k}^{n_k}, & z = k+M \\ 0, & z > k+M \end{cases} \qquad (6.\ 7)$$

დამტკიცება:

$$\mathrm{P}(\tau_k = z) = \mathrm{P}(\tau_k = z; R_k < k+M) + \mathrm{P}(\tau_k = z; R_k \geq k+M) =$$

$$= \mathrm{P}(R_k = z)\cdot I(z < k+M) + \mathrm{P}(R_k \geq k+M)\cdot I(z = k+M) \qquad (6.\ 8)$$

(6. 7) მიიღება (6. 8)-დან. (6. 5)-სა და (6. 6)-ის გათვალისწინებით,

 რ. დ. გ.

(6. 7)-დან

$$\mathrm{P}(\tau_k \leq z) = \begin{cases} {}_z q_{a_p-k}^{n_k}, & z < k+M \\ 1, & z \geq k+M \end{cases} \qquad (6.\ 9)$$

სხვანაირად:

$$\mathrm{P}(\tau_k \leq z) = {}_z q_{a_p-k}^{n_k} \cdot I(z < k+M) + I(z \geq k+M) \qquad (6.\ 10)$$

ახლა გამოვიყვანოთ τ შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილება.

წინადადება 6.2.

$$\mathrm{P}(\tau \leq x) = \begin{cases} \prod_{k=x-M+1}^{m} {}_x q_{a_p-k}^{n_k}, & x < M+m \\ 1, & x \geq M+m \end{cases} \qquad (6.\ 11)$$

დამტკიცება:

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \prod_{k=0}^{m} \mathrm{P}(\tau_k \le x) \qquad (6.\ 12)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) როცა $x - M < m$ და 2) როცა $x - M \ge m$.

პირველი შემთხვევისათვის (6. 12) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \prod_{k=0}^{x-M} \mathrm{P}(\tau_k \le x) \cdot \prod_{k=x-M+1}^{m} \mathrm{P}(\tau_k \le x) \qquad (6.\ 13)$$

პირველ თანამამრავლში $k \le x - M$, ანუ $x \ge k + M$ და (6. 10)-დან

$$\prod_{k=0}^{x-M} \mathrm{P}(\tau_k \le x) = 1 .$$

მეორე თანამამრავლში $k > x - M$, ანუ $x < k + M$ და კვლავ (6. 10)-დან

$$\prod_{k=x-M+1}^{m} \mathrm{P}(\tau_k \le x) = \prod_{k=x-M+1}^{m} {}_x q_{a_p - k}^{n_k}$$

საბოლოოდ

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \prod_{k=x-M+1}^{m} {}_x q_{a_p - k}^{n_k} \qquad (6.\ 14).$$

მეორე შემთხვევაში $x \ge M + m$. (6. 12)-ში $k \le m$, ამიტომ $x \ge M + k$. (6. 10)-დან

$$\mathrm{P}(\tau \le x) = \prod_{k=0}^{m} \mathrm{P}(\tau_k \le x) = 1 \qquad (6.\ 15)$$

(6. 14) და (6. 15) ფორმულების გაერთიანებით ვღებულობთ(6. 11)-ს,

 რ. დ. გ.

მივიღეთ τ-ს განაწილების ფუნქცია, მისი მათემატიკური ლოდინი გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$E\tau=\sum_{i=0}^{M+m} i\left(\prod_{k=i-M+1}^{m} {}_i q_{a_p-k}^{n_k}-\prod_{k=i-M}^{m} {}_{(i-1)} q_{a_p-k}^{n_k}\right) \qquad (6.\ 16)$$

(3. 22) ფორმულის შემდეგ გაკეთებული შენიშვნა აქაც სამართლიანია, თუ n_k რაოდენობები არ არის ძალზედ მცირე (ერთეულები)

$$\tau=M+m$$

7. დაგროვების და ხარჯვის პროცესები

ვარიანტიII

როგორც აღვნიშნეთ ჩვენი ამოცანაა ასევე განვსაზღვროთ საკომპენსაციო პრემია π.

დავუბრუნდეთ განსაკუთრებულ თაობათა საკომპენსაციო უზრუნველყოფის საკითხს. კვლავ დავუშვათ k-ური თაობის $k=0,1,\ldots,m$ თვითოეული წარმომადგენლის წლიური "დეფიციტი" ერთი წლის განავლობაში D_k სიდიდეა. ცხადია, პირველი წელიწადის განმავლობაში საკომპენსაციო ფონდში უნდა იყოს $L_0=n_0\cdot D_0$ თანხა, რომ უზრუნველვყოთ ნულოვანი თაობა ამ წლის განმავლობაში. მომდევნო წელიწადში საჭიროა, ნულოვანი თაობიდან ცოცხლად დარჩენილებთან ერთად, რომელთა რაოდენობა ჩვენ აღნიშვნებში არის $Z_0(1)$, უზრუნველვყოთ ამ წელიწადში პენსიაში გასული თანამშრომლებიც, რომელთა რაოდენობაა $Z_1(1)$. ანუ, ამ წელიწადში საჭირო თანხაა:

$$L_1 = D_0 \cdot Z_0(1) + D_1 \cdot Z_1(1)$$

შემდეგ წელიწადს ძველებთან ერთად ჩნდებიან ახალი პენსიონერები, რომელთა რაოდენობაა $Z_2(2)$. ამიტომ ამ წელიწადში საჭირო თანხა შეადგენს:

$$L_2 = D_0 \cdot Z_0(2) + D_1 \cdot Z_1(2) + D_2 \cdot Z_2(2).$$

თუ ამ მსჯელობას გავაგრძელებთ დავასკვნით, რომ $(i+1)$ წელიწადის განმავლობაში საკომპენსაციო უზრუნველყოფისათვის საჭირო თანხა შეადგენს სიდიდეს:

$$L_i = \sum_{k=0 \vee (i-M+1)}^{m \wedge i} D_k \cdot Z_k(i), \qquad i = 0,1,\dots,m+M-1 \qquad (7.\ 1)$$

თუ $i \geq m+M$ მაშინ $L_i = 0$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ π საკომპენსაციო პრემია საჭიროა საკომპენსაციო ფონდის შემოსავლები და გასავლები დავიყვანოთ დროის ერთსა და იგივე მომენტზე (ეს იყოს სქემის დაფუძნების მომენტი) და შევადაროთ ერთმანეთს. მაშინ საკომპენსაციო ფონდის ჯამური გასავლის ღირებულება სქემის დაფუძნების მომენტისათვის იქნება;

$$\mathrm{B} = \sum_{i=0}^{\tau} \nu^i \cdot L_i \qquad (7.\ 2)$$

ხოლო საკომპენსაციო ფონდის ჯამური შემოსავლის ღირებულება იგივე მომენტისათვის შეადგენს სიდიდეს;

$$\mathrm{A} = \pi \sum_{i=0}^{\tau-1} \nu^{i} \qquad (7.\ 3)$$

A და B შემთხვევითი სიდიდეებია.

8 საკომპენსაციო წმინდა ნეტო-პრემიის გამოსათვლელი ფორმულა

ვარიანტიII

$Z_k(i)$-ს, (რომელიც არის k-ურ თაობაში i წლის შემდეგ ცოცხლად დარჩენილთა რაოდენობა) აქვს ბინომური განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლებია;

$$\mathrm{E}Z_k(i) = {}_i p_{a_p - k} \cdot n_k$$

$$VarZ_k(i) = {}_i p_{a_p - k} \cdot {}_i q_{a_p - k} \cdot n_k$$

როგორც პირველ ვარიანტში აღვნიშნეთ, თუ n_k-ები საკმაოდ დიდი რიცხვებია, მაშინ შესაძლებელია ბინომური შემთხვევითი სიდიდის ნორმალურით აპროქსიმაცია. ე.ი.

$$Z_k(i) \sim N\left({}_i p_{a_p - k} \cdot n_k ; {}_i p_{a_p - k} \cdot {}_i q_{a_p - k} \cdot n_k\right) \qquad (8.\ 1)$$

რადგან (7. 1)-ით განმარტებული L_i წარმოადგენს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების წრფივ კომბინაციას ამიტომ ის თვითონაც ნორმალურია;

$$L_i \sim N\left(\sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot {}_i p_{a_p-k} \cdot n_k;\ \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k^2 \cdot {}_i p_{a_p-k} \cdot {}_i q_{a_p-k} \cdot n_k\right) \qquad (8.\ 2)$$

განმარტების თანახმად π არის წმინდა ნეტო-პრემია თუ:

$$\pi = \frac{\mathrm{E}B}{\mathrm{E}\sum_{i=0}^{\tau-1} \nu^i},$$

სადაც

$$\mathrm{E}B = \sum_{i=0}^{m+M-1} \nu^i \mathrm{E}L_i = \sum_{i=0}^{m+M-1} \nu^i \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_k \cdot {}_i p_{a_p-k} \cdot n_k \qquad (8.\ 3)$$

და

$$\mathrm{E}A = \pi \sum_{i=0}^{M+m-1} \nu^i \mathrm{P}(\tau \geq i+1) = \pi\left(\sum_{i=0}^{M+m-1} \nu^i - \sum_{i=0}^{M+m-1} \nu^i \cdot \mathrm{P}(\tau \leq i)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu} - \sum_{i=0}^{M+m-1} (\nu^i \cdot \prod_{k=i-M+1}^{m} {}_i q_{a_p-k}^{n_k})\right) \qquad (8.\ 4)$$

ე.ი.

$$\pi = \frac{\sum_{i=0}^{m+M-1} \nu^i \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_{k\ i}\, p_{a_p-k} \cdot n_k}{\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu} - \sum_{i=0}^{M+m-1} (\nu^i \cdot \prod_{k=i-M+1}^{m} {}_i q_{a_p-k}^{n_k})}. \qquad (8.\ 5)$$

აქაც, დიდი კოლექტივების შემთხვევაში

$$\pi = \frac{\sum_{i=0}^{m+M-1} \nu^i \sum_{k=0\vee(i-M+1)}^{m\wedge i} D_{k\ i}\, p_{a_p-k} \cdot n_k}{\frac{1-\nu^{M+m}}{1-\nu}}. \qquad (8.\ 6)$$

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი, შევადაროთ ერთმანეთს (5. 8) და (8. 6) ფორმულები.

დავუშვათ გვაქვს შემდეგნაირი ასაკობრივი სტრუქტურა.

$n_0 = 50; n_1 = 70; n_2 = 80; n_3 = 80; n_4 = 100; n_5 = 130; n_6 = 150; n_7 = 200; n_8 = 220$

$n_9 = 250; n_{10} = 280; n_{11} = 300.$

კომპენსაციას საჭიროებს 12 თაობა ე.ი. $m = 11$. ვთქვათ პენსიის ვადა $M = 5$. წლიური საპროცენტო განაკვეთი $r = 10\%$-ს, ხოლო წლიური "დეფიციტი" თვითოეულ თანამშრომელზე (საუბარია დაახლოებით თვეში 100 ლარის ტოლ პენსიაზე) წარმოადგენს შემდეგ თანხებს:

$D_0 = 1200; D_1 = 1100; D_2 = 1000; D_3 = 900; D_4 = 800; D_5 = 700; D_6 = 600; D_7 = 500; D_8 = 400$
$D_9 = 300; D_{10} = 200; D_{11} = 100.$

გამოთვლებში გამოყენებული მოკვდაობის ალბათობები აღებულია 2000 წლისათვის ორივე სქესისთვის გათვლილი მოკვდავობის ცხრილიდან.

როგორც აღვნიშნეთ მეორე მოდელის პირველ და მეორე ვარიანტში საკომპენსაციო სქემის მოქმედების ხანგრძლივობა დიდი კოლექტივებისათვის ფაქტიურად არის დეტერმინისტული სიდიდე და

$$\tau = m + M = 16$$

პირველი ვარიანტისათვის საკომპენსაციო წმინდა ნეტო-პრემია

$$\pi = 275423$$

მეორე ვარიანტისათვის

$$\pi = 238789.$$

ბუნებრივია, რომ მეორე ვარიანტში შენატანი ნაკლები აღმოჩნდა, ვინაიდან პირველ ვარიანტთან შედარებით აქ ზოგიერთ შემთხვევაში პენსია ხუთ წელზე ნაკლები პერიოდის განმავლობაში გაიცემა.

9. შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

1) აგებულია შერეული ტიპის საპენსიო სქემის მოდელი, რომელშიც შერწყმულია ფონდირებისა და სოლიდარობის პრინციპები. ამ მოდელის ფარგლებში გამოყვანილია საერთო საპენსიო შენატანის სიდიდის გამოსათვლელი ფორმულები, თაობათა ცვლის პროცესის გათვალისწინებით. ნაჩვენებია, რომ სქემაში ახალი თაობების ჩართვა იძლევა საგრძნობ ეფექტს მხოლოდ რამდენიმე პირველ ნაბიჯზე.

2) აგებულია საკომპენსაციო სქემის მათემატიკური მოდელი ვადიანი პენსიის შემთხვევაში, როდესაც ადამიანის საპენსიო ასაკის მიღწევის შემდეგ პენსია გაიცემა სრული ვადის განმავლობაში იმის მიუხედავად პენსიონერი გარდაიცვლება თუ არა პენსიის მიღების პროცესში. გამოყვანილია საკომპენსაციო სქემის მოქმედების ხანგრძლივობის ალბათური განაწილება. დათვლილია მისი საშუალო. ნაჩვენებია, რომ რამდენადმე დიდი კოლექტივებისათვის ეს სიდიდე დეტერმინისტულია. გამოყვანილია წმინდა ნეტო-პრემიის გამოსახულება, რომელიც დამქირავებელმა ყოველწლიურად უნდა შეიტანოს საკომპენსაციო ფონდში ყოველ თანამშრომელზე.

3) აგებულია საკომპენსაციო სქემის მათემატიკური მოდელი ვადიანი პენსიის შემთხვევაში, როდესაც ადამიანის საპენსიო ასაკის მიღწევის შემდეგ პენსია გაიცემა სრული ვადის განმავლობაში, თუ პენსიონერი ცოცხალია პენსიის მიღების პროცესში. თუ პენსიონერი გარდაიცვალა პენსიის მიღების პროცესში, გარდაცვალების მომენტში უწყდება პენსიის მიღება. აქაც გამოყვანილია საკომპენსაციო გეგმის ფუნქციონირების ხანგრძლივობის ალბათური განაწილება. დათვლილია მისი საშუალო. ნაჩვენებია, რომ დიდი საწარმოსთვის, სადაც თანამშრომელთა რამდენადმე დიდი რაოდენობაა ეს სიდიდე დეტერმონისტულია. გამოყვანილია წმინდა ნეტო-პრემიის გამოსათვლელი ფორმულა.

განხილულია მაგალითი, რომელშიც ერთდაიგივე საილუსტრაციო კოლექტივზე ხდება მეორე მოდელის პირველი და მეორე ვარიანტების შედარება.

ლიტერატურა

[1] ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მირზაშვილი, თ, ტორონჯაძე, ო. ღლონტი, ლ ჯამბურია. “ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები” გამომცემლობა: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი საქართველოს სტატისტიკური ასოციაცია ფონდი “ევრაზია” 1999წ.

[2] Bowers, H. , Gerber, H. , Hickman, J. , etal (1986) Actuarial mathematics, Society of Actuaries, Schaumburg.