ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მაგისტრანტის

მაკა თამაზის ასულ დარსანიას

# სამაგისტრო ნაშრომი

თემა: მარტინგალთა თეორიის გამოყენება სადაზღვევო საქმეში (გაკოტრების ალბათობა მძიმე-კუდიანი პრეტენზიების შემთხვევაში).

ხელმძღვანელი: ფიზ.-მათ. მეცნ. კანდ. ზურაბ ციბროშვილი

თბილისი

2001 წელი

# შესავალი

ცნობილია, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების გამოყენებას დაზღვევის ამოცანებში. კერძოდ, ალბათობის თეორიის მეთოდები გამოიყენება სხვადასხვა სადაზღვევო რისკების გაანგარიშებისას, სადაზღვევო პრემიების დადგენისას დაზღვევის ამა თუ იმ სახეობაში, სადაზღვევო კომპანიის უვადო და ვადიანი გაკოტრების ალბათობების გამოსათვლელად და ა. შ. რაც შეეხება მათემატიკურ სტატის-ტიკას, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ნდობის ინტერვალთა თეორიას, რომელიც გამოიყენება დაზღვევის ამა თუ იმ მოდელში შემავალი პარამეტრების შესაფასებლად, მაგალითად, ლუნდბერგის კოეფიციენტის შესაფასებლად ექსპონენციალურ მომენტებიანი განაწილების მქონე პრეტენზიების შემთხვევაში.

ნაშრომის მიზანია წარმოაჩინოს ალბათობის თეორიის მეთოდების ზემოთ აღნიშნული როლი სადაზღვევო ამოცანების გადაწყვეტაში. კერძოდ, ნაშრომის პირველი ნაწილი ეთმობა დაზღვევის კლასიკური მოდელის აღწერას სტოქასტუ-რი ანალიზის ტერმინებში და კომპანიის გაკოტრების ალბათობის გაანგარიშე-ბას (შეფასებას) ორი სხვადასხვა გზით: აღდგენითი პროცესების თეორიისა და მარტინგალთა თეორიის გამოყენებით. ორივე მეთოდი ამ ნაწილში გამოიყენება ისეთი პრეტენზიების შემთხვევაში, რომელთა განაწილებასაც გააჩნია ექსპონენ-ციალური მომენტები, ანუ არსებობს სასრული ლუნდბერგის კოეფიციენტი.

ნაშრომის მეორე ნაწილში განიხილება საკითხი იგივე გაკოტრების ალბათობის გაანგარიშების შესახებ, როდესაც პრეტენზიების განაწილებას აქვს მძიმე კუდები, ანუ როდესაც არ არსებობს ლუნდბერგის სასრული კოეფიციენტი. აქვე მოყვანილია გაკოტრების ალბათობათა ასიმპტოტური (როცა კომპანიის საწყისი კაპიტალი უსასრულოდ იზრდება) გამოსახულებები მძიმე-კუდიანი განაწილებების სხვადასხვა პარამეტრული ოჯახებისათვის: პარეტოს, ლოგნორ-მალური და ვეიბულის ოჯახებისათვის. მძიმე-კუდიან განაწილებათა ეს ოჯახები საკმარისად ხშირად გამოიყენება იმ სადაზღვევო სქემებში, რომლებშიც საუ-ბარია კატასტროფებისა და დიდი პრეტენზიების დაზღვევაზე და ასევე გადა-ზღვევის მოდელებში. თუმცა უნდა ითქვას, რომ განაწილებათა ეს ოჯახები არ

შეიძლება აღწერდეს პრაქტიკაში არსებულ ყველა სიტუაციას. ასეთი სიტუაციების შესაბამისი განაწილების ფუნქციათა ფართე კლასს წარმოადგენს ე.წ. სუბექსპონენციალურ განაწილებათა კლასი, რომლის განაწილებები მოიცემა არა ანალიზური სახით, არამედ იმ თვისებით, რომ კომპანიის პრეტენზიებზე გასაცემი ჯამური თანხის სიდიდის განაწილება შესადარია ერთი დიდი პრეტენზიის დაფარვისათვის საჭირო თანხის სიდიდესთან. ამდენად, მნიშვნელოვანია ანალიზური სახით მოცემულ მძიმე-კუდიან განაწილებათა ახალი პარამეტრული ოჯახების აგება და ამ ოჯახებისათვის გაკოტრების ალბათობათა გაანგარიშება. სწორედ აქეთაა მიმართული ნაშრომის მესამე ნაწილი, რომელშიც შემოთავაზებულია მძიმე-კუდიან პარამეტრულ განაწილებათა ერთ და ორ პარამეტრიანი ოჯახების აგების გზა. შესწავლილია ამ ოჯახების განაწილებათა თვისებები. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ ამ ოჯახების განაწილებები რეგულარულად ცვალებადია უსასრულობის მიდამოში და რომ ეს განაწილებები უსასრულოდ დაყოფადია. ბოლოს, განაწილებათა ამ ოჯახებისათვის მოცემულია უვადო გაკოტრების ალბათობათა ასიმპტოტური გამოსახულებები.

## 1. დაზღვევის კლასიკური მოდელი.

დაზღვევის კლასიკურ მოდელში, რისკის პროცესი, რომელიც განიმარტება $Z(t) = U(t) - S(t)$ ტოლობით, აღიწერება შემდეგნაირად (იხ. [3] ან [4]):

1) კომპანიის თანხა $t$ მომენტისათვის $U(t)$, წარმოადგენს დეტერმინისტულ, წრფივ ფუნქციას, საწყისი $u \geq 0$ კაპიტალითა და შემოსავლის $c > 0$ კოეფიციენტით (სიჩქარით):

$$U(t) = u + c \cdot t; \tag{1}$$

2) პრეტენზიათა პროცესი $S(t)$, წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდეების (პრეტენზიების) შემთხვევითი რაოდენობის ჯამს

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \qquad (2)$$

სადაც $Y_1, Y_2, ...$ არის პრეტენზიათა სიდიდეები, რომლებიც წარმოადგენს დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეებს, განაწილების აბსოლუტურად უწყვეტი $F$ ფუნქციით, $F(0)=0$, ხოლო $Y$-ებისაგან დამოუკიდებელი $N(t)$ მთვლელი პროცესი, რომელიც გვიჩვენებს დროის $t$-მომენტამდე მომხდარ სადაზღვევო შემთხვევათა რაოდენობას, წარმოადგენს პუასონის ერთგვაროვან პროცესს, $\lambda \cdot t$ ინტენსივობით.

გარდა ამისა, კლასიკური მოდელი გულისხმობს ე.წ. წმინდა მოგების პირობის შესრულებას, ანუ

3) $\exists \ t_1 \geq 0 \ : EZ(t) > Z(0) = u$, როცა $t > t_1$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ დროის ყოველ $t$ მომენტში $S(t)$-ს აქვს შედგენილი პუასონის განაწილება:

$$G_t(x) = P\ \{\ S\ (t) \leq x\ \} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x),$$

სადაც $F^{n*}(x) = P\{\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x\}$ არის $F$-ის $n$-ჯერადი ნახვევი.

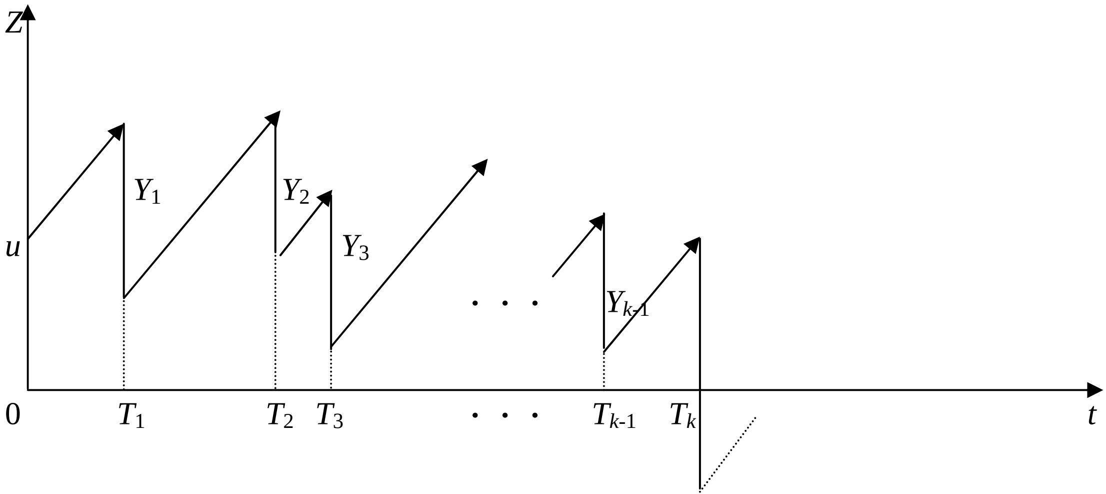
ცხადია, რომ $S(t)$ პროცესის ტრაექტორია წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ არაკლებად ფუნქციას, ნახტომის შემთხვევითი მომენტებით $\{T_k\}_{k\geq 1}$, რომლებიც მთვლელი პროცესის ნახტომის მომენტებია. ამდენად, (2)-ით განმარტებული $S(t)$ პროცესი არის სუბმარტინგალი საკუთრივი ნაკადის, $\Im_t^S = \Im_t^Z$ მიმართ, სადაც $\Im_t^z = \sigma\{N(s) : s \leq t, Y_1 ... Y_{N_t}\}$. შინაარსობრივად, $\Im_t^z$-ს ცოდნა ნიშნავს სადაზღვევო კომპანიის ყველანაირი რისკის ცოდნას $t$ მომენტამდე.

დაშვება, რომ $N$ პუასონის პროცესია, ექვივალენტურია იმისა, რომ ინტერვალი ნახტომის $T_k$ მომენტებს შორის ($T_k$ -$T_{k-1}$), დამოუკიდებელია და აქვს ერთიდაიგივე ექსპონენციალური განაწილება $\lambda$ პარამეტრით.

საბოლოოდ, კლასიკურ მოდელში რისკის პროცესი $Z(t)$ განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$Z(t) = u + ct - S(t). \qquad (3)$$

მის ტიპიურ ტრაექტორიას აქვს ნახატზე გამოსახული გრაფიკის სახე.




როგორც ვხედავთ, ეს ნახატი შეესაბამება კომპანიის გაკოტრებას $k$-ური პრეტენზიის გადახდისას.

ცხადია, რომ მოგება დროის ნებისმიერ $(0\ , t]$ ინტერვალში ტოლი იქნება სიდიდისა

$$Q(t) = ct - S(t). \qquad (4)$$

რადგან $EN(t) = \lambda t$, ამიტომ საშუალო მოგებისთვის გვაქვს

$$EQ\,(t) = ct - EN\,(t)\,EY_1 = t\,(c-\lambda\mu) = \lambda\,\mu\,t\,\rho,$$

სადაც $\mu \equiv EY_1$ და $\rho \equiv \dfrac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} = \dfrac{c}{\lambda\mu} - 1$. $\rho$-ს სადაზღვევო დატვირთვას უწოდებენ.

წმინდა მოგების პირობიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$EQ(t) = t\,(c-\lambda\mu) > 0,$$

როცა $t \ge t_1$, ანუ $\rho > 0$ ყოველი $t$-თვის. მაშინ ცხადია, რომ $Z(t) \to +\infty$, როცა $t \to \infty$, ალბათობით 1.

შემოვიღოთ გაკოტრების მომენტის ცნება. (3) და (4)-ის მიხედვით,

$$\tau(u) \equiv \inf\{t : Z(t) < 0\} = \inf\{t : S(t) - ct > u\}.$$

შემოვიღოთ აგრეთვე, შემდეგი აღნიშვნები:

$$M = \sup_{0 \le t < \infty}(S(t) - ct), \quad M_T = \sup_{0 \le t \le T}(S(t) - ct).$$

მაშინ დროის სასრულ $[0,\ T]$ ინტერვალში გაკოტრებისა და როდესმე გაკოტრების ალბათობები შესაბამისად ასე ჩაიწერება:

$$\psi(u,T) \equiv P\{\tau(u) \le T\} = P\{M_T > u\}, \qquad \psi(u) \equiv P\{\tau(u) < \infty\} = P\{M > u\}.$$

ცხადია, რომ $\phi(u) \equiv 1 - \psi(u)$ წარმოადგენს არგაკოტრების ალბათობას და $\phi(\infty) = 1$. ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს აღდგენის შემდეგ არასაკუთრივ განტოლებას (იხ. [4], [6]):

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u-z)(1-F(z))dz = \phi(0) + \frac{1}{1+\rho} \cdot \int_0^u \phi(u-z)F_I(z)dz\,,$$

სადაც $F_I(x) \equiv \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^x (1-F(z))dz$.

აღდგენის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\phi(0) = \rho\,/\,(1+\rho)$ და ამ განტოლების ერთადერთ ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი ტოლობით განმარტებული ფუნქცია (იხ. [4]):

$$\phi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^n F_I^{n*}(u)\,,$$

საიდანაც ცხადია, გაკოტრების ალბათობისათვის დავასკვნით, რომ

$$\psi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^n F_I^{n*}(u)\,. \tag{5}$$

ამ ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როცა $u \to \infty$, დადგენილია კრამერ-ლუნდბერგის შემდეგ თეორემაში

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ (ᲙᲠᲐᲛᲔᲠ-ᲚᲣᲜᲓᲑᲔᲠᲒᲘ) 1. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $R$ მუდმივა, რომ $\int_0^\infty e^{Rz}(1-F(z))dz = \frac{c}{\lambda}$.

თუ $\mu^* \equiv \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^\infty z e^{Rz}(1-F(z))dz < \infty$, მაშინ $\psi(u) \sim \frac{\rho}{(1+\rho)R\mu^*} \cdot e^{-Ru}$, როცა $u \to \infty$ და

თუ $\mu^* = \infty$, მაშინ $\psi(u) = o(e^{-Ru})$, როცა $u \to \infty$.

$R$ მუდმივას ლუნდბერგის კოეფიციენტს უწოდებენ და გაკოტრების ალბათობისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\psi(u) \le e^{-Ru}, \quad u \in [0,\infty).$$

ამ და მსგავსი ტიპის უტოლობების მიღების მძლავრ იარაღს წარმოადგენს მარტინგალური მეთოდები. კერძოდ, ასეთს წარმოადგენს ე.წ. დუბის ოპციონალური გაჩერების შემდეგი თეორემა მარტინგალებისათვის (იხ. [3])

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 2. ნებისმიერი თანაბრად ინტეგრებადი $\{M_t, \Im_t\}$ მარტინგალისა და გაჩერების ალბათობით 1 შემოსაზღვრული $\tau$ მომენტისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$E[M_\tau | \Im_t] = M_t \quad \Rightarrow \quad EM_\tau = EM_0.$$

ვნახოთ, თუ როგორ ხდება თეორემა 2-ის გამოყენება. ნებისმიერი $\theta \geq 0$ და $\nu \geq 0$-სათვის განვიხილოთ პროცესი $M_t(\nu) \equiv M(t, \theta, \nu) = e^{\theta t} e^{-\nu z_t}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 3. ნებისმიერი $\theta \geq 0$-სათვის $\lambda E(e^{\nu Y_1} - 1) = \theta + c\nu$ განტოლებას აქვს ერთადერთი $\nu_\theta$ ამონახსნი და $\{M_t(\nu_\theta), \Im_t^z\}$ პროცესი წარმოადგენს მარტინგალს.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. ვაჩვენოთ ჯერ, რომ $\lambda E(e^{\nu Y_1} - 1) = \theta + c\nu$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად $\lambda(\varphi(\nu)$-1) = $\theta + c\nu$, სადაც $\varphi(\nu) = \int_0^\infty e^{\nu t} dF(t)$ წარმოადგენს $F$-ის შესაბამის ლაპლასის გარდაქმნას; ამიტომ ცხადია, რომ $\varphi(0) = 1$. ცხადია ასევე, რომ

$$[\lambda(\varphi(\nu) - 1)]' = \lambda\varphi'(\nu) = \lambda\int_0^\infty t e^{\nu t} dF(t) > 0$$

და

$$[\lambda(\varphi(\nu) - 1)]'' = \lambda\varphi''(\nu) = \lambda\int_0^\infty t^2 e^{\nu t} dF(t) > 0,$$

ე.ი., $\lambda\varphi(\nu)$-1 ფუნქცია ზრდადია და ამოზნექილი. რადგან $c>0$ და $\theta \geq 0$, ν-ს წრფივ $\theta + c\nu$ ფუნქციას ცხადია, ექნება ერთადერთი გადაკვეთის წერტილი $\lambda(\varphi(\nu) - 1)$ ზრდად ფუნქციასთან.

შევნიშნოთ, რომ $M(0) = e^{-\nu u}$ დეტერმინისტული სიდიდეა. გადავწეროთ $M$ პროცესი შემდეგნაირად:

$$M(t)=e^{-\theta t}\cdot e^{-\nu z_t}=e^{-\theta t}\cdot e^{-\nu(u+ct-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i)}=M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)t}\cdot e^{\nu\sum_{i=1}^{N_t}Y_i}=M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)t}\prod_{i=1}^{N_t}e^{\nu Y_i}.$$

მაშინ ამ პროცესის ნაზრდს ექნება შემდეგი სახე:

$M(t+\Delta t)$-$M(t)$=$M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)(t+\Delta t)}\prod_{i=1}^{N(t+\Delta t)}e^{\nu Y_i}$ -$M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)t}\prod_{i=1}^{N(t)}e^{\nu Y_i}$ = $M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)t}\cdot\prod_{i=1}^{N(t)}e^{\nu Y_i}\times$

$\times[e^{-(\theta+c\nu)\Delta t}\cdot e^{\nu Y_{N(t)+1}I\{\Delta N(t)=1\}}-1]=K_n(t)\cdot[e^{-(\theta+c\nu)\Delta t}\cdot e^{\nu Y_{N(t)+1}I\{\Delta N(t)=1\}}-1]$,

სადაც $K_n(t)\equiv M(0)\cdot e^{-(\theta+c\nu)t}\cdot\prod_{i=1}^{N(t)}e^{\nu Y_i}$. მაშინ, რადგან $K_n(t)$ არის $\Im_t^z$ ზომადი, ამიტომ

$E[M(t+\Delta t)$-$M(t)|\Im_t^z]=K_n(t)\cdot(e^{-(\theta+c\nu)\Delta t}\cdot E[e^{\nu Y_{N(t)+1}I\{\Delta N(t)=1\}}|\Im_t^z]$-1)=

$=K_n(t)\cdot(e^{-(\theta+c\nu)\Delta t}\cdot(1+\lambda\Delta t(Ee^{\nu Y}-1))-1)=K_n(t)\cdot(e^{-(\theta+c\nu)\Delta t}-1+\lambda\Delta tE(e^{\nu Y_1}-1))+o(\Delta t))=$

$=K_n(t)\cdot(\lambda\Delta t(E(e^{\nu Y_1}-1)-\theta-c\nu)+o(\Delta t))$

აქედან ვასკვნით, რომ $E[\Delta M(t)|\Im_t^z]=0\Leftrightarrow\lambda E(e^{\nu Y_1}-1)=\theta+c\nu$, რაც სრულდება მხოლოდ $\lambda E(e^{\nu Y_1}-1)=\theta+c\nu$ განტოლების ერთადერთი $\nu_\theta$ ამონახსნისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ $M_t(\nu_\theta)$ მარტინგალი $\theta=0$-სათვის, ანუ განვიხილოთ $\{M_t,\Im_t^z\}$ პროცესი, სადაც $M_t\equiv e^{-\nu_0 z_t}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. დაზღვევის კლასიკურ მოდელში $u$ საწყისი კაპიტალით, გაკოტრების $\psi(u)$ ალბათობისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\frac{e^{-\nu_0 u}}{m_2(\nu_0)}\le\psi(u)\le\frac{e^{-\nu_0 u}}{m_1(\nu_0)},\qquad(6)$$

სადაც

$$m_1(\nu)=\inf_{t\ge0}\frac{e^{-\nu t}\int_t^\infty e^{\nu s}dF(s)}{1-F(t)},\quad m_2(\nu)=\sup_{t\ge0}\frac{e^{-\nu t}\int_t^\infty e^{\nu s}dF(s)}{1-F(t)}.$$

დამტკიცება. რადგან $\tau(u)$ გაკოტრების მომენტია, ამიტომ $Z_{\tau(u)}<0$ და $Z_{\tau(u)-}\equiv\lim_{t\uparrow\tau}Z_t>0$. დავუშვათ, $Z_{\tau(u)-}=b$, სადაც $b>0$. მაშინ $Z(t)$ პროცესის

ნახტომის ბოლო მომენტის სიდიდე ტოლია $b$ - $Z_{\tau(u)}$ და მისი პირობითი განაწილება $\{Z_{\tau(u)-}= b\}$ პირობით, მოიცემა ტოლობით

$$P\{ b - Z_{\tau(u)} \le x | Z_{\tau(u)-}= b\} = P\{Y \le x \mid Y> b\}\cdot I\{x>b\}= \frac{F(x)-F(b)}{1-F(b)}\cdot I\{x>b\}.$$

ამიტომ $E[M_{\tau(u)} \mid \tau(u) < \infty, Z_{\tau(u)-}= b] = E[e^{-\nu_0 z_t} \mid \tau(u) < \infty, Z_{\tau(u)-}= b] =$

$$= \frac{e^{-\nu_0 b}\int_b^\infty e^{\nu_0 s}dF(s)}{1-F(b)},$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$m_1(\nu_0) \le E[e^{-\nu_0 z_t} \mid \tau(u) < \infty] \le m_2(\nu_0). \qquad (7)$$

დუბის ოპციონალური გაჩერების თეორემით $e^{-\nu_0 z_t}$ მარტინგალისათვის დავასკვნით, რომ

$$E[e^{-\nu_0 z_t} \mid \tau(u) < \infty] = \frac{e^{-\nu_0 u}}{P\{\tau(u)<\infty\}}.$$

უკანასკნელი გამოსახულების (7)-ში ჩასმით საბოლოოდ მივიღებთ (6)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

## 2. გაკოტრების ალბათობა მძიმე-კუდიანი განაწილების მქონე პრეტენზიების შემთხვევაში.

მძიმე-კუდიანი განაწილების მქონე პრეტენზიების შემთხვევაში, როდესაც მოდელში დიდი ალბათობით დასაშვებია დიდი გადასახადები, კრამერ-ლუნდბერგის თეორია აღარ მუშაობს, რადგანაც განაწილებას აღარ გააჩნია ექსპონენციალური მომენტები და მაშასადამე, ლუნდბერგის კოეფიციენტი არ არსებობს. ასეთ განაწილებათა ტიპიურ მაგალითებს წარმოადგენს პარეტოსა და ლოგნორმალური მოდელები. ეს განაწილებები ხასიათდება იმით, რომ მათი ლაპლას-სტილტიესის გარდაქმნა არ არსებობს, ანუ $\int_0^\infty e^{tx}dF(x)=\infty, \quad \forall t>0$-თვის.

ასეთ შემთხვევებში გაკოტრების ალბათობის ასიმპტოტური შეფასების დაწერა არსებითად ეყრდნობა იმ ფაქტს, რომ $F$-ის შესაბამისი $F_I$ განაწილება იყოს

სუბექსპონენციალური. როგორც გვახსოვს, აღდგენის განტოლების ერთადერთ ამონახსნს ჰქონდა შემდეგი სახე:

$$\psi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^n \cdot F_I^{n*}(u),$$

სადაც

$$F_I(x) = \frac{\int_0^x (1-F(s))ds}{\int_0^\infty (1-F(s))ds} = \frac{\int_0^x (1-F(s))ds}{\mu}$$

და $F_I^{n*}$ წარმოადგენს $F_I$-ის $n$-ჯერად ნახვევს.

განაწილებათა სუბექსპონენციალური $\boldsymbol{S}$ ოჯახის განმარტება ასეთია (იხ. [10]): ვიტყვით, რომ $G \in \boldsymbol{S}$, თუ სრულდება პირობა

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-G(x))^{n*}}{1-G(x)} = n, \quad \forall n \in N .$$

ამ განმარტების შინაარსი შემდეგში მდგმარეობს: ვთქვათ, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული $G$ განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია. მაშინ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-G(x))^{n*}}{1-G(x)} = n, \quad \forall n \in N \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{P\left\{ \sum_{i=1}^{n} Z_i > x \right\}}{P\left\{ \max_{1\le i\le n} Z_i > x \right\}} = 1, \quad \forall n \in N .$$

ამ კლასის განაწილებებს მიეკუთვნება მაგალითად, განაწილებები რეგულარულად ცვალებადი კუდებით, ანუ ისეთი $F$ განაწილებები, რომელთათვისაც არსებობს $\theta > 0$, ისეთი, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$1 - F(x) = x^{-\theta} L(x),$$

სადაც $L(x)$ არის უსასრულობაში ნელა ცვალებადი ფუნქცია, ანუ

$$L(xt) / L(x) \to 1, \text{ როცა } x \to \infty ,$$

ნებისმიერი $t > 0$–სათვის (იხ. მაგ., [6]). ასეთი $\theta$ ერთადერთია და მას განაწილების რეგულარობის მაჩვენებელს უწოდებენ.

$\boldsymbol{S}$ კლასის განაწილებებისათვის გაკოტრების ალბათობის ასიმპტოტური გამოსახულება დაზღვევის კლასიკურ მოდელისათვის, დადგენილია შემდეგ თეორემაში (იხ. [5])

თეორემა 5. თუ $F_I \in S$, მაშინ

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \int_u^{\infty} (1-F(s))ds, \quad u \to \infty .$$

როგორც ვხედავთ, გაკოტრების ალბათობას აქვს საკმარისად მარტივი გამოსახულება, მაგრამ ამ თეორემის მთელი სირთულე მისი პირობის, $F_I \in \boldsymbol{S}$-ის შემოწმებაშია.

რეგულარულად ცვალებადი $F$-ებისათვის მტკიცდება, შემდეგი

**თეორემა 6.** თუ $F$ არის რეგულარულად ცვალებადი კუდის მქონე განაწილება, მაჩვენებლით $\theta > 1$, მაშინ $F_I \in \boldsymbol{S}$ და გაკოტრების ალბათობას აქვს სახე:

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \frac{u^{-\theta+1}}{\theta-1} \cdot L(u), \quad u \to \infty .$$

(იხ. [2]).

უკანასკნელი ზღვრული თანაფარდობის შემოწმება წინა თეორემაზე დაყრდნობით არ წარმოადგენს სირთულეს. მართლაც, წინა თეორემის ძალით,

$$\frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \int_u^{\infty} (1-F(s))ds = \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \int_u^{\infty} s^{-\theta} L(s)ds = \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot u^{-\theta+1} L(u) \cdot \int_1^{\infty} t^{-\theta} \cdot \frac{L(tu)}{L(u)} dt \sim$$

$$\sim \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot u^{-\theta+1} L(u) \cdot \int_1^{\infty} t^{-\theta} dt = \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \frac{u^{-\theta+1}}{\theta-1} \cdot L(u) .$$

დავუბრუნდეთ საკითხს $F_I \in S$ პირობის შემოწმების შესახებ. შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციები:

$$Q(x) \equiv -\ln(1-F(x)),\ \mu(x) \equiv Q'(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)},$$

სადაც $f$ აღნიშნავს $F$–ის შესაბამის სიმკვრივეს. როგორც რისკის თეორიიდანაა ცნობილი, $\mu$–ს უწოდებენ $F$–ის შესაბამის რისკის ფუნქციას, ხოლო $Q$–ს – $F$–ის შესაბამის დაგროვილი რისკის ფუნქციას.

მაშინ სამართლიანია $F_I \in S$ პირობის შესრულების შემდეგი საკმარისი პირობა (იხ. [8]):

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 7. ა) თუ $\limsup_{x\to\infty} x\mu(x) < \infty$, მაშინ $F_I \in S$;

ბ) თუ $\limsup_{x\to\infty} x\mu(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \mu(x) = 0$ და სრულდება ერთ-ერთი ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან, მაშინ $F_I \in S$:

1) $\limsup_{x\to\infty} x\mu(x)/Q(x) < 1$;

2) $\mu$ არის რეგულარულად ცვალებადი მაჩვენებლით $\delta\in[-1;0)$;

3) არის რეგულარულად ცვალებადი მაჩვენებლით $\delta\in(0;1)$, ხოლო $\mu$ კლებადია არგუმენტის რაიმე მნიშვნელობიდან დაწყებული;

4) $\mu(x)$ არის რეგულარულად ცვალებადი და კლებადი ფუნქცია არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის, ხოლო $Q(x)$-$x\mu(x)$ არის რეგულარულად ცვალებადი მაჩვენებლით 1.

ამ თეორემაზე დაყრდნობით, [8]-ში მოყვანილია გაკოტრების ალბათობების ასიმპტოტური გამოსახულებები ცნობილი მძიმე-კუდიანი პარამეტრული ოჯახებისათვის. ისინი ასე გამოიყურება:

1) პარეტოს განაწილება:

$$F(x) = 1 - (a/x)^b,\ x \ge a,\ a > 0,\ b > 1,$$

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda a}{(b-1)c - \lambda a} \cdot (u/a)^{-b+1}, \quad u \to \infty .$$

2) ლოგნორმალური განაწილება:

$$F(x) = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(\ln x - \ln a)} \cdot \exp\left( -\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2} \right), \quad a \ge 1, \quad \sigma > 0 ,$$

$$\psi(u) \sim \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}(c/\lambda - a\exp(\sigma^2/2))} \cdot \frac{u}{(\ln u - \ln a)^2} \cdot \exp\left( -\frac{(\ln u - \ln a)^2}{2\sigma^2} \right), \quad u \to \infty .$$

3) ვეიბულის განაწილება:

$$F(x) = 1 - \exp(-x^a),\ 0 < a < 1,$$

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda \cdot \exp(-u^a)}{ac - \lambda \cdot \Gamma(1/a)} \cdot u^{1-a}, \quad u \to \infty .$$

## 3. მქიმე-კუდიანი განაწილების ერთი პარამეტრული მოდელის შესახებ.

ვთქვათ, $\Phi$ სტანდარტული ნორმალური განაწილებაა, ხოლო $\varphi$ მისი შესაბამისი სიმკვრივე. მილსის ფარდობა განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$M(x)=\frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}, \tag{8}$$

როცა $x\geq 0$. გადავწეროთ (8) შემდეგნაირად:

$$M(x)=\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\cdot e^{-u\cdot x}du. \tag{9}$$

(9)-დან ჩანს, რომ ფუნქცია $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot M(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ლაპლასის გარდაქმნა და მაშასადამე, $M$ არის სავსებით მონოტონური ფუნქცია (იხ. [6]), ანუ ყოველი $n\geq 1$-თვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$(-1)^n\cdot M^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} u^n\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-u\cdot x}du>0. \tag{10}$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის ფუნქცია:

$$h(x;n)=\frac{(-1)^n}{2^{n/2-1}\cdot\Gamma(n/2)}\cdot M^{(n)}(x)=\frac{1}{2^{n/2-1}\cdot\Gamma(n/2)}\cdot\int_0^{+\infty} u^n\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-u\cdot x}du, \tag{11}$$

სადაც $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ არის გამა ფუნქცია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $h(x;n)>0$ და $\int_0^{+\infty} h(x;n)dx=1$, ანუ $h(\cdot;n)$ ყოველი $n\geq 1$-თვის არის განაწილების სიმკვრივე. მის შესაბამის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(x;n)=\frac{1}{2^{n/2-1}\cdot\Gamma(n/2)}\cdot\int_0^{\infty} u^{n-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot(1-e^{-ux})du. \tag{12}$$

აღვნიშნოთ $M_n$-ით (12) განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ მისი მომენტებია:

$$EM_n^r = \frac{2^{-n/2+1}}{\Gamma(n/2)} \cdot \int_0^{+\infty} x^r \cdot \left( \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-t^2/2} \cdot e^{-t \cdot x} dt \right) dx = 2^{-r/2} \cdot \frac{\Gamma(n/2 - r/2) \cdot \Gamma(r+1)}{\Gamma(n/2)}, \qquad (13)$$

როცა $-1 < r < n$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $Mn$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს სასრული მომენტები მხოლოდ $n$ რიგამდე (ჩაუთვლელად), ე.ი. ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყოველი $n \geq 1$–თვის $H(\bullet;n)$ არის მძიმე კუდიანი განაწილება. მაგალითად, $M_1$ არის შემთხვევითი სიდიდე უსასრულო საშუალოთი და დისპერსიით (გავიხსენოთ კოშის განაწილება), $M_2$ არის შემთხვევითი სიდიდე სასრული საშუალოთი და უსასრულო დისპერსიით და ა.შ.

მოხერხებულია (12) წარმოდგენაში ნატურალური $n$ გავავრცელოთ ნამდვილ $\theta$ პარამეტრამდე და განაწილების ფუნქციათა $\{H(\bullet;n)\}_{n>0}$ მიმდევრობის ნაცვლად განვიხილოთ განაწილების ფუნქციათა შემდეგი პარამეტრული ოჯახი:

$$\boldsymbol{H} = \{H(x;\theta):\ H(x;\theta) = \frac{1}{2^{\theta/2-1} \cdot \Gamma(\theta/2)} \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta-1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot (1 - e^{-ux}) du,\ \theta > 0\}. \qquad (14)$$

ამ ოჯახის განმსაზღვრელი $\theta$-პარამეტრის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ის გვიჩვენებს განაწილების კუდების "სიმძიმეს", რადგანაც (13)-ის მსგავსად,

$$EX^r = 2^{-r/2} \cdot \frac{\Gamma(\theta/2 - r/2) \cdot \Gamma(r+1)}{\Gamma(\theta/2)},$$

და $EX^r < \infty$, როცა $r < \theta$. აქ $X$ აღნიშნავს $H(\cdot;\theta)$ განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, ისმის შეკითხვა, თუ მძიმეკუდიან განაწილებათა რომელ ცნობილ კლასს მიეკუთვნება $H(\cdot;\theta)$ განაწილება. ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი

**თეორემა 8**. განაწილების $H(\cdot;\theta)$ ფუნქცია რეგულარულად ცვალებადია უსასრულობის მიდამოში მაჩვენებლით $\theta$, ანუ

$$1 - H(x;\theta) = x^{-\theta} L(x), \text{ როცა } x \to \infty. \qquad (15)$$

**დამტკიცება.** გადავწეროთ (14) განაწილების შესაბამისი სიმკვრივის ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$h(x;\theta) = (1/N(\theta)) \cdot \varphi(x;\theta), \qquad (16)$$

სადაც

$$\varphi(x;\theta) \equiv \int_0^{+\infty} u^{\theta} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du \tag{17}$$

და $N(\theta) \equiv 2^{\theta/2-1} \cdot \Gamma(\theta/2)$, $\theta > 0$.

ცხადია, რომ

$$\varphi^{(m)}(x;\theta) = (-1)^m \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du\,. \tag{18}$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\varphi^{(m+1)}(x;\theta) = (\theta+m) \cdot \varphi^{(m-1)}(x;\theta) + x \cdot \varphi^{(m)}(x;\theta)\,. \tag{19}$$

მართლაც,

$$\varphi^{(m+1)}(x;\theta) = (-1)^{m+1} \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot u e^{\frac{-u^2}{2}} \cdot e^{-ux} du = (-1)^m \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-ux} \cdot (e^{\frac{-u^2}{2}})' du =$$

$$= (-1)^m [-(\theta+m) \int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-ux} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}} du + x \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-ux} \cdot e^{\frac{-n^2}{2}} du =$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot (\theta+m) \int_0^{\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-ux} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}} du + x \cdot (-1) \int_0^{\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-ux} e^{\frac{-u^2}{2}} du =$$

$$= (\theta+m) \cdot \varphi^{(m-1)}(x;\theta) + x \cdot \varphi^{(m)}(x;\theta)$$

ასევე ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left(\varphi^{(m)}(x;\theta)\right)^2 \le \varphi^{(m-1)}(x;\theta) \cdot \varphi^{(m+1)}(x;\theta)\,. \tag{20}$$

ჰელდერის უტოლობით გვაქვს

$$(\varphi^{(m)}(x;\theta))^2 = [\int_0^{+\infty} (u^{\frac{\theta+m-1}{2}} \cdot e^{\frac{-u^2}{4}} \cdot e^{\frac{ux}{2}}) \cdot (u^{\frac{\theta+m-1}{2}} \cdot e^{\frac{-u}{4}} \cdot e^{\frac{nx}{2}}) du]^2 \le$$

$$\le (-1)^{m-1} \int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}} \cdot e^{-ux} du \cdot (-1)^{m+1} \int_0^{+\infty} u^{\theta+m+1} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}} \cdot e^{-ux} du \le \varphi^{(m-1)}(x) \cdot \varphi^{(m+1)}(x)$$

მაშინ (19) და (20)-დან ვღებულობთ (უტოლობების მიღების გზა ემთხვევა [10]-ში მილსის ფარდობისათვის საზღვრების დადგენისას გამოყენებულ გზას):

$$\left(-\frac{\varphi^{(m)}(x;\theta)}{\varphi^{(m-1)}(x;\theta)} + \frac{\sqrt{x^2+4(\theta+m)}+x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\varphi^{(m)}(x;\theta)}{\varphi^{(m-1)}(x;\theta)} - \frac{\sqrt{x^2+4(\theta+m)}-x}{2}\right) \le 0\,.$$

რადგან $\varphi(\cdot;\theta)$ ფუნქცია სავსებით მონოტონურია, უკანასკნელი უტოლობის მარცხენა მხარეში, პირველი თანამამრავლი დადებითია ყოველი $x \geq 0$ და $\theta > 0$-თვის და ყოველი $m \geq 0$ გვექნება:

$$\frac{\varphi^{(m)}(x;\theta)}{\varphi^{(m-1)}(x;\theta)} \leq c_m(x;\theta),$$

ანუ

$$\int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du \leq c_m(x;\theta) \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du, \tag{21}$$

სადაც

$$c_m(x;\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + 4(\theta+m)} - x}{2}. \tag{22}$$

თუ (21)-ს ჩავწერთ ($m$+1)-თვის, მის მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალისათვის მივიღებთ შემდეგ ქვედა საზღვარს:

$$\frac{1}{c_{m+1}(x;\theta)} \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta+m+1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du \leq \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du$$

და (19)-ის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\theta+m}{x + c_{m+1}(x;\theta)} \cdot \int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du \leq \int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du.$$

რადგან

$$x + c_{m+1}(x;\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + 4(\theta+m+1)} + x}{2} = \frac{\theta+m+1}{c_{m+1}(x;\theta)},$$

უკანასკნელი უტოლობა (21)-თან ერთად საბოლოოდ გვაძლევს:

$$\frac{\theta+m}{\theta+m+1} \cdot c_{m+1}(x;\theta) \leq \frac{\int_0^{+\infty} u^{\theta+m} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du}{\int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du} \leq c_m(x;\theta). \tag{23}$$

გადავწეროთ (23) მისი ექვივალენტური შემდეგი ფორმით

$$\frac{\theta+m}{\theta+m+1} \cdot c_{m+1}(x;\theta) \leq -\frac{\partial}{\partial x} \ln\left( \int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1} \cdot e^{-u^2/2} \cdot e^{-ux} du / N(\theta+m) \right) \leq c_m(x;\theta),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\exp\left(-\int_0^x c_m(t;\theta)dt\right) \le \frac{1}{N(\theta+m)}\cdot\int_0^{+\infty} u^{\theta+m-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du \le \exp\left(-\frac{\theta+m}{\theta+m+1}\cdot\int_0^x c_{m+1}(t;\theta)dt\right),$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$\exp\left(-\int_0^x c_m(t;\theta)dt\right) \le 1 - H(x;\theta+m) \le \exp\left(-\frac{\theta+m}{\theta+m+1}\cdot\int_0^x c_{m+1}(t;\theta)dt\right). \qquad (24)$$

ლოპიტალის წესის თანახმად, ყოველი $m \ge 0$ და $\theta > 0$-თვის, შეიძლება ადვილად შევამოწმოთ, რომ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4(\theta+m+1)}+t}dt}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4(\theta+m)}+t}dt}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4(\theta+m)}+x} = 1/2$$

ამიტომ (24)-დან დავასკვნით, რომ

$$1 - H(x;\theta+m) \sim x^{-m-\theta}. \qquad (25)$$

ამგვარად, $m = 0$-თვის $H(\cdot;\theta)$ განაწილების კუდებისათვის სამართლიანია (15) და თეორემა დამტკიცებულია.

ფაქტიურად, ჩვენ დაგვიმტკიცებია, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$1 - H(x;\theta) = x^{-\theta}\cdot L(x;\theta), \qquad (26)$$

სადაც

$$L(x;\theta) = x^{\theta}\cdot(1/N(\theta))\cdot\int_0^{+\infty} u^{\theta-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du = (1/N(\theta))\cdot\int_0^{+\infty} u^{\theta-1}\cdot e^{-u^2/(2x^2)}\cdot e^{-u}du \qquad (27)$$

არის უსასრულობაში ნელა ცვალებადი ფუნქცია ანუ $L(xt;\theta) / L(x;\theta) \to 1$, როცა $x \to \infty$, ყოველი $t > 0$-თვის.

შენიშვნა 1. შევნიშნოთ, რომ (24)-ის ძალით, $\limsup_{x\to\infty}\frac{1-H(x;\theta)}{1-H(2x;\theta)} = 2^{\theta} < \infty$.

ამიტომ $H(\cdot;\theta)$ მიეკუთნება $D$ კლასს. ($D$-არის დომინირებული ვარიაციის მქონე ფუნქციათა კლასი). ასევე, (24)-ის ძალით ადვილია იმის ჩვენება, რომ ყოველი $y \in R$-თვის $\lim_{x\to\infty}\frac{1-H(x-y;\theta)}{1-H(x;\theta)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-y}\right)^{\theta} = 1$ და ამიტომ $H(\cdot;\theta)$ ეკუთვნის ე.წ. $\Psi$

კლასს (ამ კლასების განმარტებებისათვის იხ. [7]). გარდა ამისა, ცნობილია, რომ $D \cap \Psi \subset L \subset \Psi$, სადაც $L$ არის სუბექსპონენციალურ განაწილებათა კლასი. აქედან ჩვენ ვასკვნით, რომ $H(\cdot;\theta)$ მიეკუთვნება $L$ კლასს.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, $h(x;\theta)$ არის სავსებით მონოტონური სიმკვრივე. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი (იხ. [6])

**თეორემა 9.** განაწილების ფუნქცია $H(\cdot;\theta)$ უსასრულოდ დაყოფადია.

(14)-ით განმარტებული განაწილების ოჯახის შემდგომი დახასიათებისათვის განვიხილოთ ამ ოჯახის შესაბამისი ინტენსივობის ფუნქცია:

$$\mu_h(x;\theta) \equiv \frac{h(x;\theta)}{1-H(x;\theta)} = \frac{\int_0^{+\infty} u^{\theta}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du}{\int_0^{+\infty} u^{\theta-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du}. \tag{28}$$

მისთვის სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა 10.** (28)-ით განმარტებული ინტენსივობის $\mu_h(x;\theta)$ ფუნქცია წარმოადგენს $x$ ცვლადის კლებად და $\theta$ პარამეტრის ზრდად ფუნქციას.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ $\mu_h(x;\theta)$ ფუნქციის წარმოებული $x$ ცვლადით:

$$\mu_h'(x;\theta) = \frac{\left(\int_0^{+\infty} u^{\theta}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du\right)^2 - \int_0^{+\infty} u^{\theta+1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du\cdot\int_0^{+\infty} u^{\theta-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du}{\left(\int_0^{+\infty} u^{\theta-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot e^{-ux}du\right)^2}. \tag{29}$$

მაშინ $\mu_h(x;\theta)$ ფუნქციის კლებადობა $x$ ცვლადით შედეგია ჰელდერის უტოლობისა, რომლის მიხედვითაც ცხადია, რომ (29) გამოსახულების მრიცხველი უარყოფითია. გარდა ამისა, გადავწეროთ (29) შემდეგნაირად:

$$\mu_h'(x;\theta) = \mu_h^2(x;\theta) - \mu_h(x;\theta)\mu_h(x;\theta+1) = \mu_h(x;\theta)(\mu_h(x;\theta) - \mu_h(x;\theta+1)). \tag{30}$$

(23) წარმოდგენიდან და იქიდან, რომ $\mu_h'(x;\theta) < 0$ დავასკვნით, რომ $\mu_h(x;\theta) - \mu_h(x;\theta+1) < 0$ ანუ $\mu_h(x;\theta) < \mu_h(x;\theta+1)$ ყოველი $x \geq 0$-თვის, ანუ $\mu_h(x;\theta)$ წარმოადგენს $\theta$ პარამეტრის ზრდად ფუნქციას.

**შენიშვნა 2.** ცხადია, რომ (24)-დან გვაქვს

$$\exp\left(-2\theta\cdot\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4}+t}dt\right)\le 1-H(x\cdot\sqrt{\theta};\theta)\le \exp\left(-2\theta\cdot\int_0^{x\cdot\sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}}} \frac{1}{\sqrt{t^2+4}+t}dt\right),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$1-H(x\cdot\sqrt{\theta};\theta)\sim \exp\left(-2\theta\cdot\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4}+t}dt\right),\quad \text{როცა}\quad \theta\to\infty. \tag{31}$$

თუ დავუბრუნდებით ნატურალური $\theta = n$ პარამეტრის შემთხვევას და გავიხსენებთ $M_n$ შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრებას, (32)-დან მივიღებთ, რომ

$$P\{M_n/\sqrt{n}>x\}\sim(1-G(x))^n, \tag{32}$$

სადაც

$$G(x)=1-\exp\left(-\int_0^x c_0(t)dt\right)=1-\exp\left(-2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4}+t}dt\right)$$

არის განაწილების საკუთრივი ფუნქცია [0,+∞)-ზე და მაშასადამე, (32)-დან დავასკვნით, რომ საკმარისად დიდი $n$-თვის $M_n/\sqrt{n}$ შემთხვევითი სიდიდე "ისევე იქცევა" როგორც $G$ განაწილების მქონე დამოუკიდებელი $Y_1,Y_2,...Y_n$ შემთხვევითი სიდიდეების მინიმუმი, $Z_n=\min(Y_1,Y_2,...,Y_n)$.

გაკოტრების ალბათობის ასიმპტოტური გამოსახულების მისაღებად გავიხსენოთ თეორემა 6 და გამოვიყენოთ ის (27)-ით განმარტებული ნელა ცვალებადი ფუნქციისათვის. მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 11. როცა $\theta > 1$ და პრეტენზიების განაწილებაა (14)-ით განმარტებული $H$ ფუნქცია, გაკოტრების ალბათობისათვის გვაქვს

$$\psi(u)\sim\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\cdot\frac{u}{\theta-1}\cdot\frac{1}{2^{\theta/2-1}\cdot\Gamma(\theta/2)}\cdot\int_0^\infty t^{\theta-1}\cdot e^{-tu}\cdot e^{-t^2/2}dt,\ \text{როცა}\ u\to\infty.$$

განვიხილოთ განაწილების ფუნქციათა შემდეგი პარამეტრული ოჯახი:

$\boldsymbol{H}$ = {$H(x;\theta,\sigma)$: $H(x;\theta,\sigma)=\dfrac{1}{2^{\theta/2-1}\cdot\sigma^\theta\cdot\Gamma(\theta/2)}\cdot\displaystyle\int_0^\infty t^{\theta-1}\cdot e^{-t^2/2}\cdot(1-e^{-tx})dt$, $\theta>0$, $\sigma>0$}.

როგორც ვხედავთ, $H(x;\theta,\sigma) = H(x\cdot\sigma;\theta)$ და მაშასადამე, ეს ოჯახი წარმოადგენს (14)-ის განზოგადებას და ამ ოჯახისათვის სამართლიანი იქნება ყველა ის ფაქტი, რომელსაც ადგილი ჰქონდა ერთპარამეტრიანი (14)-ით

განმარტებული ოჯახისათვის. კერძოდ, ამ შემთხვევაში გაკოტრების ალბათობისათვის გვექნება

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \cdot \frac{u\sigma}{\theta-1} \cdot \frac{1}{2^{\theta/2-1} \cdot \Gamma(\theta/2)} \cdot \int_0^\infty t^{\theta-1} \cdot e^{-tu\sigma} \cdot e^{-t^2/2} dt, \text{ როცა } u \to \infty.$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ როცა $\sigma^2 = \theta$ ამ ოჯახის განაწილება აკმაყოფილებს (31) თანადობას.

## ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა


[1]. Asmussen, S. Ruin Probabilities. Advanced Series on Statisticasl Science & Applied Probability, World Scientific Publishing Co., 2000, vol.2.

[2]. von Bahr, B. Asymptotic Ruin Probabilities when Exponential Moments Do Not Exist. Scand. Actuarial J. 1975, pp. 6-10.

[3]. Dassios, A., Embrechts, P. Martingales and Insurance Risk. Commun. Statist.-Stochastic Models, 1989, 5(2), pp. 181-217.

[4]. Embrechts, P., Klüppelberg, C. Some Aspects of Insurance Mathematics. Teoria Veroyatn. i Primenen, 1993, V.2, pp.374-416.

[5]. Embrechts, P., Veraverbeke, N. Estimates for The Probability of Ruin with Special Emphasis on The Possibility of Large Claims. Insurance: Mathematics and Economics, 1982, v.1, pp.55-72.

[6]. Feller, W. An Introduction to Probability Thery and Its Applications. Vol. II (Russian), Moscow, MIR, 1967.

[7]. .Klüppelberg, C. Subexponential Distributions and Inegrated Tails. J. Appl. Prob., 1988, 25, pp. 132-141.

[8]. Klüppelberg, C. Estimation of Ruin Probabilities by Means of Hazard Rates. Insurance: Mathematics and Economics, 1989, v.8, pp. 279-285.

[9]. Mosidze, A.T., Tsigroshvili, Z.P. About The Boundaries for The Mills's Ratio. Proc. A. Razmadze Math. Institute, 2000, v. 22, pp. 137-158.

[10]. Teugels, J.L. The Class of Subexponential Distributions. The Annals of Probability, 1975, Vol. 3, No. 6, pp. 1000-1011.