საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ინსტიტუტი
გამოყენებითი მათემატიკის კათედრა

ალექსანდრე ომანაძე

პრეტენზიების რაოდენობის განაწილების აღწერა კოლექტიური რისკის მოდელში

სპეციალობა 0102 - ფინანსური მათემატიკა
სადიპლომო ნაშრომი
ბაკალავრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
ხელმძღვანელი: ფ.მ.მ.კ. დოც. გ.მირზაშვილი

თ ბ ი ლ ი ს ი
2003

§1 ამოცანის დასმა

ტრადიციულად, სადაზღვევო ბიზნესი ორ კლასად იყოფა: სიცოცხლის დაზღვევის სახეობები და დაზღვევის ყველა დანარჩენი სახეობა. როდესაც ამ კლასებს ახასიათებენ, ძირითადად აღნიშნავენ რომ, სიცოცხლის დაზღვევა წარმოადგენს გრძელვადიან ბიზნესს, ხოლო მეორე კლასში შემავალი სახეობები მოკლევადიანია.

ძირითადად ეს დახასიათება სწორია, თუმცაღა არსებობს გამონაკლისებიც. ასე, ცნობილია, რომ არსებობს მოკლევადიანი სიცოცხლის დაზღვევაც, ე.წ. რისკობრივი, არადაგროვებადი დაზღვევა, სადაც იფარება მხოლოდ დამზღვევის გარდაცვალების რისკი და დაზღვევის პერიოდი ხშირად ერთ წელს არ აღემატება.

ამგვარი გამონაკლისები არასიცოცხლის დაზღვევის სფეროშიც გვხვდება და ამის ერთ-ერთ თვალსაჩინო მაგალითს კატასტროფული რისკების დაზღვევა წარმოადგენს. ეს თეზისი მოითხოვს უფრო დაწვრილებით განხილვას, ვინაიდან ერთი შეხედვით მისი მართებულობა არ არის ცხადი. მართლაც, გარეგნულად მომხმარებლის (დამზღვევის) გადასახედიდან კატასტროფული დაზღვევა გამოიყურება როგორც მოკლევადიანი (განსხვავებით სიცოცხლის გრძელვადიანი დაზღვევის სახეობებისგან). ამგვარი რისკები (მაგალითისთვის მხედველობაში შეიძლება ვიქონიოთ მიწისძვრის რისკი) ტიპიურად ხანძრის, აფეთქების, ძარცვა-ყაჩაღობის, ვანდალიზმის და სხვა რისკებთან ერთად შედის ქონებრივი დაზღვევის პაკეტში და როგორც წესი, შესაბამისი დაზღვევა ერთი წლის ვადით ფორმდება. ამავე დროს, სადაზღვევო კომპანიებისთვის (მზღვეველთათვის) კატასტროფული რისკები მკვეთრად განსხვავდება სხვა ქონებრივი რისკებისაგან და ძირითადი განსხვავებები შემდეგში მდგომარეობს:

1. კატასტროფული რისკები არ არიან ერთმანეთისგან დამოუკიდებლები – ერთმა სტიქიურმა უბედურებამ შესაძლოა გამოიწვიოს დაზღვეულ რისკთა დიდი

ნაწილის განხორციელება. ამისგან განსხვავებით, მაგ. სახანძრო რისკები შეიძლება პრაქტიკულად ერთმანეთისგან დამოუკიდებლებლად ჩავთვალოთ, თუ არ ვიგულისხმებთ ხის მასალით გაშენებულ ქალაქებს, სადაც ხანძარი კატასტროფულ რისკს წარმოადგენს (ამის მაგალითებია წარსულში მომხდარი დიდი ხანძრები ჩიკაგოსა და ლონდონში).

2. კატასტროფის ალბათობა ერთი წლის განმავლობაში (მაგალითად ჩვენ რეგიონში) გაცილებით უფრო ნაკლებია, ვიდრე ალბათობა იმისა, რომ ერთი წლის განმავლობაში მზღვეველის პორტფელი სხვა ტიპის რაიმე ზარალს გამოიწვევს. სხვა სიტყვებით, შეიძლება გავიდეს მრავალი წელი ყოველგვარი კატასტროფის გარეშე, იმ დროს როდესაც თითქმის არ არსებობს ისეთი წელიწადი, რომ პორტფელში არ მოხდეს ერთი ან რამდენიმე ხანძარი, ძარცვა – ყაჩაღობა ან სხვა.

მიუხედავად იმისა, რომ პრაქტიკაში კატასტროფული და სხვა ქონებრივი რისკები ერთ პაკეტშია მოთავსებული, აღნიშნული განსხვავებები მოითხოვს, რომ სადაზღვევო კომპანიამ შეიმუშავოს მათ მიმართ მკვეთრად განსხვავებული მიდგომები; კერძოდ, ნებისმიერი სხვა ქონებრივი რისკების დაზღვევა განიხილოს როგორც მოკლევადიანი ბიზნესი, ხოლო კატასტროფული რისკების დაზღვევა – როგორც გრძელვადიანი. მართლაც, ბიზნესის მოკლევადიანობა სხვა სიტყვებით იმას ნიშნავს, რომ პორტფელში აკრეფილი პრემია ყოფნის იგივე წლის განმავლობაში პორტფელით გამოწვეული ზარალების დაფარვას. საყოველთაოდ ცნობილია, რომ ამ ეფექტს იძლევა პორტფელში გაერთიანებულ დამზღვევებს შორის რისკის გადანაწილება და ეფექტი მით უფრო ძლიერია, რაც უფრო მაღალია მათი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლობის ხარისხი. დამოუკიდებლობის პირობებში ეფექტის სიძლიერეზე ასევე მნიშვნელოვნად მოქმედებს პორტფელის მოცულობა – რაც უფრო დიდია პორტფელი, მისი ერთიანი (ჯამური) რისკი მით უფრო სტაბილურია ანუ განჭვრეტადია, და მით უფრო მაღალი სანდოობით შესაძლებელია საკმარისი სადაზღვევო პრემიის განსაზღვრა.

გასაგებია, რომ კატასტროფული რისკების არსებობის პირობებში გარკვეულ რეგიონში მოქმედი კომპანიისათვის აბსოლუტურად შეუძლებელია ერთ წელიწადში ისეთი პრემიის აკრეფა, რომელიც ამ წელს მომხდარი კატასტროფის შემთხვევაში დაფარავს მთელ ზარალს. ამის მიზეზი სწორედ კატასტროფულ რისკებს შორის ზემოთ აღნიშნული დამოკიდებულებაა, რაც ფაქტიურად ანულებს პორტფელის შიგნით რისკის გადანაწილების ეფექტს იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც პორტფელის მოცულობა საკმაოდ დიდია. მაშასადამე, კატასტროფული რისკების დაზღვევა უნდა განხილულ იქნას როგორც გრძელვადიანი ბიზნესი, სადაც რისკის გადანაწილება ძირითადად დროში ხდება და არა დამზღვევებს შორის. კომპანიისათვის ასეთი მიდგომა მართებულია იმის მიუხედავად, რომ გრძელვადიანი სიცოცხლის დაზღვევისაგან განსხვავებით, წლიდან წლამდე კონკრეტული დამზღვევები შეიძლება იცვლებოდნენ.

საერთაშორისო სადაზღვევო ბაზრის თვალსაზრით, მოცემული რეგიონის კატასტროფული რისკები შესაძლოა განხილულ იქნას როგორც მოკლევადიანი ბიზნესის საგანი. სხვა სიტყვებით, იმ შემთხვევაში თუ მოხდება ამ რისკების გადაზღვევა და გადამზღვევლის პორტფელში ერთდროულად აღმოჩნდება მრავალი, ერთმანეთისგან დაშორებული რეგიონების კატასტროფული რისკები, კვლავ გაჩნდება დამოუკიდებლობა, ამუშავდება რისკის ‘‘სივრცეში’’ გადანაწილების პრინციპი და ამ პორტფელის წლიურმა პრემიამ შესაძლოა კიდევაც დაფაროს შესაბამისი წლიური ზარალი. აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ რეგიონალური სადაზღვევო კომპანიისათვის გადაზღვევა ადგილობრივი კატასტროფული რისკების დაზღვევის წარმოების სწორი და კარგი საშუალებაა. ამავე დროს, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ კატასტროფების იშვიათობის გამო, სწორი სტრატეგია გრძელვადიან პერსპექტივაში რაიმე ტიპის ‘‘შერეულ’’ ქცევაში მდგომარეობს – ზოგიერთ წელს გადავაზღვიოთ ბიზნესი, ზოგიერთ წელს კი – ‘‘გავრისკოთ’’ და არ გადავაზღვიოთ, ან გადავაზღვიოთ მხოლოდ მცირე ნაწილი. ცხადია, რომ თუ კომპანია რომელიმე წელს ბიზნესის დიდ ნაწილს გადააზღვევს, მას ძალზედ მცირე შემოსავალი დარჩება და თუ იმ წელს

კატასტროფა არ მოხდა „გადაყრილი ფული" სინანულს გამოიწვევს. კომპანიამ შეიძლება ჩათვალოს, რომ მას შეეძლო მეტი შემოსავლის მიღება და პრემიის ნაწილის სამომავლოდ თავად დარეზერვირება. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ამ გზით კომპანიას თავად შეუძლია გრძელვადიანი ბიზნესის წარმოება ანუ წლების განმავლობაში საკმარისი რეზერვის შექმნა და გადაზღვევაზე საერთოდ უარის თქმა.

წინამდებარე ნაშრომის მაზანია რეგიონალური სადაზღვევო კომპანიის მიერ კატასტროფული რისკების დაზღვევის ბიზნესის მათემატიკური მოდელის შემუშავება და ამ მოდელის ფარგლებში ქცევის საუკეთესო სტრატეგიის განსაზღვრა. ამ მიზნით ჩვენ ვიყენებთ მართვადი მარკოვის ჯაჭვების მათემატიკურ აპარატს, რომელიც მოკლედ ჩამოყალიბებულია შემდგომ განყოფილებაში.

§2. მართვადი მარკოვის ჯაჭვები. ზოგიერთი ძირითადი შედეგი

2.1. წყვეტადი მართვადი მარკოვის ჯაჭვი მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლით $N=\{1,2,3,\ldots,k,\ldots\}$ და გადაწყვეტილებათა სასრული სიმრავლით $\mathscr{A}=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$, რომელიც შეესაბამება გადასვლის ალბათობათა ოჯახს

$$\{\ p_{ij}^a : p_{ij}^a \geq 0, \sum_{j\in N} p_{ij}^a \leq 1, i,\, j\in N, a\in \mathscr{A}\ \}$$

მოიცემა ობიექტთა შემდეგი ერთობლიობით:

ა) ნებისმიერი სიმრავლე Ω, მისი ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრების არაკლებადი $\{F_n\}$ ნაკადით $n=1,2,3,\ldots$;

ბ) შემოსაზღვრული $r(i,a)$ და $c(i,a)$ ფუნქციები განსაზღვრული $N\times\mathscr{A}$ დეკარტეს ნამრავლზე;

გ) Ω -ს ზომად (x_n, a_n) ასახვათა მიმდევრობა შესაბამისად N -ში და $\mathscr{A}$-ში შეთანხმებული $\{F_n\}$ ნაკადთან;

დ) მარკოვის მომენტი τ $\{F_n\}$ ნაკადის მიმართ, რომელიც ღებულობს ნატურალურ მნიშვნელობებს;

ე) ალბათურ ზომათა ყველანაირი უსასრულო მიმდევრობების ოჯახი

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left\{\bar{Q}\right\} \quad , \qquad \bar{Q} = \left\{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \ldots\right\}$$

პირობით ალბათობათა შემდეგი თვისებებით:

1) $\bar{Q}_i(x_{n+1} = j / F_n) = p_{ij}^{a_n}$, $\quad \bar{Q}_i(x_1 = i) = 1$; $\quad \bar{Q}_i$ თითქმის ყველგან;

2) $\bar{Q}_i(\tau = 1) = \delta$, $\bar{Q}_i(\tau = n / F_{n-1}, x_n, a_n, \tau > n-1) = \delta, \quad 0 < \delta < 1,$

$\bar{Q}_i$ თითქმის ყველგან;

წყვეტად მართვად მარკოვის ჯაჭვებთან ტიპიურად დაკავშირებულია შემდეგი ოპტიმიზაციის ამოცანა: ვიპოვოთ მართვადი ჯაჭვის ტრაექტორიებსა და შეწყვეტის τ მომენტზე დამოკიდებული რაიმე L ფუნქციონალის $E^{\bar{Q}}L$ საშუალოს (რომელიც თავის მხრივ განისაზღვრება როგორც $E^{\bar{Q}}L = (E^{\bar{Q}_i})_{i=1,2,3...}$ მიმდევრობა) მაქსიმუმი $\bar{\mathbf{Q}}$ სიმრავლეზე. ცხადია, რომ ეს ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ მაქსიმიზაციის ამოცანამდე $\mathbf{Q} = \{Q\}$ კლასზე, $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}$, სადაც Q_k წარმოადგენს $\bar{Q}_k$ -ს შევიწროებას σ -ალგებრაზე, რომელიც წარმოქმნილია (x_n, a_n) მიმდევრობითა და τ შეწყვეტის მომენტით. თავის მხრივ ეს უკანასკნელი ამოცანა შეიძლება გამოითქვას სტრატეგიების ტერმინებში, რომლებიც შემდეგნაირად განისაზღვრებიან.

განსაზღვრება 2.1: სტრატეგია π , რომელიც შეესაბამება ზომათა $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}$ მიმდევრობას, ეს არის $\mathscr{A}$-ზე პირობით განაწილებათა უსასრულო მიმდევრობა $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots\}$, სადაც

$$\pi_i = (\pi_i^{(n)}(A) = Q_i(a_n \in A / a_1, x_2, a_2, x_3, a_3, ... a_{n-1}, x_n))_{n\geq 1}, \quad A \subset \mathscr{A}$$

ცნობილია, რომ არა მხოლოდ ყოველ Q-ს შეესაბამება გარკვეული π სტრატეგია, არამედ პირიქითაც – ყოველი π სტრატეგია გადასვლის ალბათობათა (p_{ij}^a) ოჯახთან ერთად განსაზღვრავს გარკვეულ ზომათა Q მიმდევრობას. სხვა სიტყვებით, **Q** კლასი შეიძლება ,,გადანომრილ'' იქნას სტრატეგიებით და თუ Π-თი აღვნიშნავთ სტრატეგიათა სიმრავლეს, მაშინ **Q** კლასზე ოპტიმიზაციის ამოცანა დავა Π სიმრავლეზე $E^{\pi} L \equiv E^{Q^{\pi}} L$ გამოსახულების ოპტიმიზაციის ამოცანაზე.

განსაზღვრება 2.2: π სტრატეგიას ეწოდება მარკოვისებური, თუ

$$\pi_i^{(n)}(A) = Q_i^{\pi}(a_n \in A / x_n), \forall i \in N, n = 1,2,3,...$$

განსაზღვრება 2.3: π სტრატეგიას ეწოდება არარანდომიზებული, თუ ყოველი ფიქსირებული $(a_1, x_2, a_2, x_3, a_3, ... a_{n-1}, x_n)$ წინაისტორიისათვის არსებობს ისეთი $a^{(n)} \in \mathscr{A}$ რომ

$$\pi_i^{(n)}(\{a^{(n)}\}) = 1, \forall i \in N, n = 1,2,3,...$$

განსაზღვრება 2.4: სტრატეგიას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $\pi_i^{(n)}(*)$ არ არის დამოკიდებული n-ზე.

განსაზღვრება 2.5: მარკოვის არარანდომიზებულ ერთგვაროვან π სტრატეგიას ეწოდება სტაციონარული და იგი გაიგივებულია ისეთ f ფუნქციასთან, რომელიც ასახავს N-ს $\mathscr{A}$-ზე და

$$f(j) = a \quad \text{თუ} \quad Q_i^{\pi}(a_n = a / x_n = j) = 1; \forall i, j \in N; n = 1,2,3,...$$

სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასი აღვნიშნოთ F ასოთი. ადვილი მისახვედრია, რომ f სტრატეგიას შეესაბამება ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი მდგომარეობათა სიმრავლით N, და გადასვლის მატრიცით $P^f = (p_{ij}^{f(i)})$.

2.2. კლასიკურად, წინა პუნქტში ხსენებული L ფუნქციონალის როლში იღებენ შემდეგი სახის ზოგად ადიტიურ ფუნქციონალს:

$$L = \sum_{n=1}^{\tau} r(x_n, a_n) + c(x_\tau, a_\tau), \qquad (2.1)$$

სადაც ტიპიურად $r(x_n, a_n)$-ის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ეს არის n-ურ ნაბიჯზე x_n მდგომარეობაში ყოფნისას a_n არჩევანის გაკეთების საფასური, ხოლო $c(x_\tau, a_\tau)$ არის შეწყვეტის მომენტში მიღებული „ჯილდო''. ცხადია ამ პირობითი ტერმინების მიუხედავად, როგორც $r(x_n, a_n)$, ასევე $c(x_\tau, a_\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი.

შემდგომ პარაგრაფებში მოყვანილი იქნება მოდელები, სადაც x_1 (საწყისი მდგომარეობა) ყოველთვის ერთის ტოლია, ასე რომ, ჩვენთვის საკმარისი იქნება π სტრატეგიის შეფასება შემდეგი გამოსახულების მეშვეობით:

$$R^\pi = E_1^\pi L$$

სადაც E_1^π ნიშნავს Q_1^π ზომით გასაშუალოებას.

განსაზღვრება 2.6: R^π-ს ეწოდება π სტრატეგიის შეფასება და

$$R^* = \sup_{\pi \in \Pi} R^\pi$$

გამოსახულებას ეწოდება ამოცანის ფასი. π სტრატეგიას ეწოდება ε-ოპტიმალური $\forall \varepsilon \geq 0$ -სათვის, თუ $R^\pi \geq R^* - \varepsilon$. 0-ოპტიმალურ სტრატეგიას ეწოდება უბრალოდ ოპტიმალური.

ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევისათვის სამართლიანია შემდეგი ფუნდამენტური

თეორემა 2.1 ([1],[2]):

$$R^* = \sup_F R^f$$

და არსებობს ოპტიმალური სტაციონარული სტრატეგია.

ეს თეორემა იმის საშუალებას იძლევა, რომ მომავალში ვიმუშაოთ მხოლოდ სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასში, ანუ ვეძებოთ სტრაციონარული სტრატეგია, რომელიც ოპტიმალურია ასევე სტაციონარულ სტრატეგიებს შორის.

გარდავქმნათ $R^f = E_1^f L$ გამოსახულება, რისთვისაც დაგვჭირდება შემდეგი აღნიშვნები:

$$r^f = (r(1, f(1)), r(2, f(2)),...)^T$$

$$c^f = c(c(1, f(1)), c(2, f(2)),...)^T$$

$(P^f)_1^k$ – P^f მატრიცის k-ური ხარისხის პირველი სტრიქონი.

$r^f(n), c^f(n)$ – r^f და c^f ვექტორების n-ური ელემენტი.

გვაქვს:

$$R^f = E_1^f(\sum_{n=1}^{\tau} r(x_n, a_n) + c(x_\tau, a_\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\delta(\sum_{k=1}^{n}(P^f)_1^{k-1} r^f) + (P^f)_1^{n-1} c^f) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}(P^f)_1^{n-1}\delta c^f + (\delta r^f + (1-\delta)\delta(r^f + (P^f)_1 r^f) +$$
$$+ (1-\delta)^2\delta(r^f + (P^f)_1 r^f + (P^f)_1^2 r^f) + ...) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}(P^f)_1^{n-1}\delta c^f + \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}(P^f)_1^{n-1} r^f =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}(P^f)_1^{n-1}(r^f + \delta c^f)$$

2.3 შემოვიღოთ კლასიკურისგან ოდნავ განსხვავებული ადიტიური ფუნქციონალი:

$$L = \sum_{n=1}^{\tau-1} r(x_n, a_n) + c(x_\tau, a_\tau). \qquad (2.2)$$

შესაბამისად შეგვიძლია r და c ფუნქციებს ზემოთ მოცემულისგან განსხვავებული ინტერპრეტაცია მივცეთ. კერძოდ ჩავთვალოთ, რომ $r(x_n, a_n)$ არის n-ურ ნაბიჯზე x_n მდგომარეობაში ყოფნისას a_n გადაწყვეტილების მიღების შედეგად წარმოქმნილი ფულადი ნაკადის ღირებულებას ბიზნესის დაწყების მომენტისათვის იმ პირობაში, რომ ამ წელს კატასტროფა არ მომხდარა, ხოლო c ფუნქცია წარმოადგენს შეწყვეტის მომენტში წარმოქმნილი ფულადი ნაკადის ღირებულებას ბიზნესის დაწყების მომენტისათვის. ადვილი დასანახია, რომ ახლებურად ჩაწერილი L ფუნქციონალის შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$R^f = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta)^{n-1} (P^f)_1^{n-1} ((1-\delta) r^f + \delta c^f) \qquad (2.3)$$

ამგვარად, საბოლოო მაქსიმიზაციის ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ მოიძებნოს ისეთი სტაციონარული f სტრატეგია, რომლისთვისაც (2.3) გამოსახულება უდიდესია.

§3 მოდელი I – უმარტივესი გადაწყვეტილებათა სიმრავლე

3.1 წარმოვიდგინოთ გარკვეულ რეგიონში (მაგალითად თბილისში) მოქმედი სადაზღვევო კომპანია, რომელიც აწარმოებს კატასტროფული რისკების დაზღვევას.

განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც კომპანიის ხელთ არსებული პორტფელის მთლიანი (ჯამური) სადაზღვევო თანხა შეადგენს M -ს. ჩვენი დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ კომპანიის პორტფელი სტატიკურია, ანუ დაზღვეულთა რაოდენობა, შესაბამისად დასაზღვევი ქონების ნუსხა და M თანხა წლიდან წლამდე არ იცვლება. სხვა სიტყვებით, ჩვენ ვიხილავთ სიტუაციას, როდესაც ქონების ამორტიზაციის ტემპი ემთხვევა ინფლაციის ტემპს და ამგვარად ქონების დღევანდელი ღირებულება უცვლელი რჩება.

პირველ მოდელში განვიხილოთ უმარტივესი სიტუაცია, როდესაც სადაზღვევო კომპანიას ყოველი წლის დასაწყისში აქვს მხოლოდ ორი დიამეტრალურად განსხვავებული არჩევანი – ან მთელი ბიზნესი გადააზღვიოს ან საერთოდ არაფერი არ გადააზღვიოს.

სიმარტივისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ კომპანია იღებს მთელ პრემიას (რომელიც პირველ წელს S თანხას შეადგენს და შემდგომში ისე იზრდება, რომ მისი დღევანდელი ღირებულება უცვლელი რჩება) ყოველი წლის 1-ელ იანვარს და ამ წლის განმავლობაში მომხდარ ყველა ზარალს ისტუმრებს 31 დეკემბერს.

ასევე სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ყოველ წელს შესაძლოა, რომ ან საერთოდ არ მოხდეს სტიქიური მოვლენა (მაგ. მიწისძვრა), ან მოხდეს ზომიერი სიძლიერის და პორტფელში ჯამურად გამოიწვიოს M_1 სიდიდის ტოლი ზარალი

$(M_1 < M)$, რაც არ ჩაითვლება კატასტროფად და ბიზნესი გაგრძელდება, ან მოხდეს კატასტროფა, რის შედეგადაც ზარალი სრული M თანხის ტოლი იქნება და ბიზნესი შეწყდება. სხვა სიტყვებით, ჩვენ ვთვლით, რომ წლიური ჯამური ზარალები აღიწერება დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობით

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$$

სადაც

$$\xi_i \sim \begin{pmatrix} 0 & M_1 & M \\ 1-\theta & p\theta & (1-p)\theta \end{pmatrix},$$

და θ არის მოცემულ წელს რაიმე სახის სადაზღვევო შემთხვევის განხორციელების ალბათობა, ხოლო p – ალბათობა იმისა, რომ მისი შედეგი არ იქნება კატასტროფული.

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ასეთ ვითარებაში შევიმუშაოთ საუკეთესო გრძელვადიანი ქცევის წესი.

ამ ამოცანის მათემატიკურ მოდელად შეიძლება გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში აღწერილი წყვეტადი მარკოვის მართვადი ჯაჭვი, რომელიც შემდეგი ობიექტებით მოიცემა:

მდგომარეობათა უსასრულო სივრცე $X = \{1,2,3,\dots,k,\dots\}$, სადაც მდგომარეობა წარმოადგენს მთლიან კალენდარულ წელს;

გადაწყვეტილებათა ორელემენტიანი სიმრავლე $A = \{0,1\}$, სადაც 0 ნიშნავს გადაწყვეტილებას არ გადაზღვევის, ხოლო 1 – მთლიანად გადაზღვევის შესახებ;

ჯაჭვისგან დამოუკიდებელი შეწყვეტის მომენტი τ , ისეთი რომ ყოველ ნაბიჯზე შეწყვეტის ალბათობა კატასტროფის დადგომის ალბათობის, ანუ $\delta = (1-p)\theta$ -ს ტოლია პირობაში, რომ მანამდე კატასტროფა არ მომხდარა;

სტაციონარულ სტრატეგიათა სიმრავლე $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, სადაც ყოველი f_i სტრატეგია წარმოადგენს 0-ების და 1-ების უსასრულო მიმდევრობას.

$$f_i = (a_1, a_2, a_3, ...), \quad a_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში მდგომარეობები წარმოადგენენ კალენდარულ წლებს, გადასვლის მატრიცის სტრიქონები ნებისმიერი სტაციონარული სტრატეგიის დროს ერთი და იგივე იქნება:

$$P^f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad f \in F.$$

r და c ფულად ნაკადებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$r(j,1) = \alpha S$$

$$r(j,0) = S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p} M_1$$

$$c(j,1) = \alpha S$$

$$c(j,0) = S - M \;,$$

სადაც αS წარმოადგენს პრემიის ნაწილს, რომელიც კომპანიას რჩება პორტფელის მთლიანად გადაზღვევის შემდეგ (მაგალითისათვის შეიძლება ვიგულისხმოთ გადაზღვევის საკომისიო).

3.2 როგორც წინა პარაგრაფიდან გახდა ცნობილი, მოცემული სტაციონარული სტრატეგიის შეფასება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$R^f = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta)^{n-1} (P^f)_1^{n-1} ((1-\delta) r^f + \delta c^f) . \qquad (3.1)$$

ცხადია, რომ P^f მატრიცის n -ური ხარისხი წარმოადგენს მატრიცას, რომლის i -ური სტრიქონი შედგება 0-ებისა და ერთი ცალი 1-საგან, რომელიც მდებარეობს ამ სტრიქონის და $i+n$ სვეტის გადაკვეთაზე, ხოლო მისი პირველი სტრიქონის ნამრავლი r^f და c^f ვექტორებზე, ეს უბრალოდ იქნება ამ

ვექტორების n -ური ელემენტი. ამის გათვალისწინებით, (3.1) გამოსახულება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$R^{f}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f}(n)+\delta c^{f}(n)\right] \qquad (3.2)$$

ოპტიმალური სტრატეგიის მოსაძებნად, ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი თეორემის დამტკიცება.

თეორემა (3.1): განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგიები:

$$f_0=(a_1,a_2,...,0,a_{m+1},...) \quad \text{და} \quad f_1=(a_1,a_2,...,1,a_{m+1},...)$$

თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$(1-\alpha)S\le\left(\theta pM_1+\delta M\right) \qquad (3.3)$$

მაშინ

$$R^{f_1}\ge R^{f_0}$$

ხოლო თუ:

$$(1-\alpha)S\ge\left(\theta pM_1+\delta M\right) \qquad (3.4)$$

მაშინ:

$$R^{f_1}\le R^{f_0}$$

დამტკიცება: (3.2)-ს თანახმად გვაქვს

$$R^{f_1}=\sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_1}(n)+\delta c^{f_1}(n)\right]+(1-\delta)^{m}\left[(1-\delta)r^{f_1}(m)+\delta c^{f_1}(m)\right]+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_1}(n)+\delta c^{f_1}(n)\right]$$

$$R^{f_0}=\sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_0}(n)+\delta c^{f_0}(n)\right]+(1-\delta)^{m}\left[(1-\delta)r^{f_0}(m)+\delta c^{f_0}(m)\right]+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_0}(n)+\delta c^{f_0}(n)\right]$$

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$R^{f_1}-R^{f_0}=(1-\delta)^{m}\left[(1-\delta)r^{f_1}(m)+\delta c^{f_1}(m)\right]-(1-\delta)^{m}\left[(1-\delta)r^{f_0}(m)+\delta c^{f_0}(m)\right]=$$
$$=(1-\delta)^{m}\left[\alpha S-(1-\delta)\left(S-\frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}M_1\right)-\delta(S-M)\right]=$$
$$=(1-\delta)^{m}\left[\left(\theta pM_1+\delta M\right)-(1-\alpha)S\right]$$

ცხადია, რომ რადგან $0<\delta<1$, m -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $R^{f_1}-R^{f_0}$ გამოსახულება დადებითია, თუ სრულდება (3.3) პირობა, და უარყოფითია თუ სრულდება (3.4) პირობა, რ.დ.გ.

შედეგი: თუ სრულდება (3.3) პირობა, სტაციონარულ სტრატეგიათა სიმრავლეში ოპტიმალური სტრატეგიაა

$$f^*=(1,1,1,...)$$

მართლაც, ნებისმიერი $f_{(0)}=(0,a_2,a_3,...)$ ტიპის სტრატეგიისათვის თეორემა 3.1 -ის თანახმად მოიძებნება $f_{(1)}=(1,a_2,a_3,...)$ სტრატეგია, რომლის შეფასებაც მის შეფასებაზე მეტი იქნება, ანუ ოპტიმალური სტრატეგია $f_{(1)}$ ტიპისაა. შემდეგ ნებისმიერი $f_{(1,0)}=(1,0,a_3,...)$ ტიპის სტრატეგიისათვის არსებობს მასზე „უკეთესი" $f_{(1,1)}=(1,1,a_3,...)$ სტრატეგია და ა.შ. საბოლოოდ მივალთ f^* სტრატეგიამდე (ოპტიმალური სტრატეგიის არსებობის თეორემა იხ. §2-ში).

ცხადია, რომ თუ სრულდება (3.4) პირობა, ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ოპტიმალური სტრატეგიაა

$$f^{**}=(0,0,0,...)$$

3.3. ზემოთ აღწერილ მოდელში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ გარკვეულ პირობებში გადაზღვევა კომპანიისათვის წარმოადგენს კატასტროფული რისკების ბიზნესის წარმართვის ეფექტურ საშუალებას. საინტერესო იქნებოდა თვით (3.3) და (3.4) პირობების უფრო დაწვრილებით განხილვა:

$$(1-\alpha)S\le\left(\theta pM_1+\delta M\right)$$

$$(1-\alpha)S\ge\left(\theta pM_1+\delta M\right)$$

როგორც ვხედავთ, უტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს გადაზღვევის პრემიას, ხოლო მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულება – პოტფელის საშუალო წლიურ რისკს. ანუ თუკი გადაზღვევის პრემია ნაკლებია საშუალო წლიურ რისზე, კომპანიას ურჩევნია მთლიანად გადააზღვიოს თავისი პორტფელი, ვიდრე ეს რისკი საკუთარ თავზე დაიტოვოს, მიუხედავად იმისა, რომ αS მოგება, რომელიც ამ შემთხვევაში ერთ წელიწადში

კომპანიას რჩება, შეიძლება ძალზედ მცირე იყოს. უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკაში (3.4)-საგან განსხვავებით (3.3) პირობა საკმაოდ ხშირად სრულდება, რის მიზეზიც §1-ში აღნიშნული ტერიტორიულად დაშორებული რეგიონების კატასტროფულ რისკებს შორის არსებული დამოუკიდებლობაა.

ცნობილია, რომ რეალობაში გადამზღვევი კომპანიები თითქმის არასოდეს არ იღებენ საკუთარ თავზე რეგიონალური კომპანიების მთელ პორტფელს, როგორც წესი, ადგილი აქვს ხოლმე ნაწილობრივ პროპორციულ, ან არაპროპორციულ გადაზღვევას. შემდგომი პარაგრაფები სწორედ ასეთ, უფრო რეალისტურ მოდელებს მოიცავს.

§ 4 მოდელი №2 – პროპორციული გადაზღვევის შემთხვევა

4.1. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ წინა მოდელთან შედარებით უფრო რეალისტურ სიტუაციას, როდესაც რეგიონალური სადაზღვევო კომპანიის წინაშე დგას კატასტროფული რისკების საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის შერჩევის ამოცანა. ვთქვათ, კომპანიამ უნდა მიიღოს გადაწყვეტილება არა პორტფელის მთლიანად გადაზღვევა-არგადაზღვევის შესახებ, არამედ აირჩიოს რამოდენიმე პროპორციული გადაზღვევის კონტრაქტიდან ერთ-ერთი.

ზოგადად, პროპორციული გადაზღვევა წარმოადგენს გადაზღვევის ისეთ ტიპს, როდესაც ცედენტი (რეგიონალური კომპანია) გადასცემს გადამზღვეველს პორტფელში შემავალი ყოველი რისკის გარკვეულ $\tilde{q}_k$ ნაწილს და ამისათვის იხდის ამ რისკის შესაბამისი S_k პრემიის გარკვეულ ნაწილს. ამ რისკით გამოწვეული ნებისმიერი ზარალის მოხდენის შემთხვევაში, გადამზღვეველი კომპანია იხდის სადაზღვევო ანზღაურების $\tilde{q}_k$ ნაწილს. სხვა სიტყვებით, თუ პორტფელი შედგება m ცალი სადაზღვევო კონტრაქტისგან და k -ურ პოლისზე დაფიქსირდა $\hat{M}$ ზარალი, გადამზღვეველი კომპანია დაფარავს მის $\tilde{q}_k \hat{M}$ ნაწილს. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ე.წ. წილობრივი გადაზღვევა

(Quota Share), სადაც $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = ... = q$. ამ შემთხვევაში შეიძლება ითქვას, რომ გადაზღვეულია მთელი პორტფელის q ნაწილი, ანუ გადამზღვეველი კომპანია გადაიხდის პორტფელის ჯამური ზარალის q ნაწილს.

წინა მოდელის მსგავსად, პორტფელის წლიური ჯამური ზარალის განაწილებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\xi_i \sim \begin{pmatrix} 0 & M_1 & M \\ 1-\theta & p\theta & (1-p)\theta \end{pmatrix}$$

მოდელის შესაბამისი მარკოვის მართვადი ჯაჭვი შემდეგნაირად მოიცემა:

მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლე $X = \{1,2,3,...,k,...\}$;

გადაწყვეტილებათა სასრული სიმრავლე $A = \{q_1, q_2, q_3, ..., q_k\}$, სადაც q_i წარმოადგენს პორტფელის ჯამური რისკის იმ ნაწილს, რომელსაც კომპანია გადამზღვეველს გადასცემს და ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ

$$q_{i+1} > q_i, \quad i = 1,2,...k-1.;$$

პროცესისაგან დამოუკიდებელი შეწყვეტის მომენტი τ , სტრატეგიათა თვლადი სიმრავლე F და ნებისმიერი სტრატეგიის შესაბამისი გადასვლის მატრიცა P^f (იხ. §3).

ყოველი სტაციონარული სტრატეგია წარმოადგენს უსასრულო მიომდევრობას:

$$f_i = (a_1, a_2, a_3, ..) \quad , \qquad a_i \in A.$$

r და c ფულად ნაკადებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$r(j, q_i) = S - (1-\alpha)q_i S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}(1-q_i)M_1$$

$$c(j, q_i) = S - (1-\alpha)q_i S - (1-q_i)M .$$

ამგვარად, $(1-\alpha)q_i S$ წარმოადგენს q_i პროპორციული გადაზღვევის პრემიას, სადაც α არის წინა პარაგრაფში შემოღებული სრული პრემიის წილი, რომელიც კომპანიაში რჩებოდა მთელი პორტფელის გადაზღვევისას.

4.2. ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგია სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასში, რომელიც

$$R^f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^f(n)+\delta c^f(n)\right]$$

გამოსახულებას ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება §3-ის ანალოგიური თეორემის დამტკიცება:

თეორემა 4.1.: ვთქვათ $i>j$.განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგიები:

$$f_i=(a_1,a_2,a_3,...,q_i,a_{m+1},...),$$

$$f_j=(a_1,a_2,a_3,...,q_j,a_{m+1},...),$$

თუ სრულდება წინა პარაგრაფში შემოღებული პირობა (3.3):

$$(1-\alpha)S\le\left(\theta pM_1+\delta M\right)$$

მაშინ

$$R^{f_i}\ge R^{f_j}$$

ხოლო თუ სრულდება (3.4) პირობა:

$$(1-\alpha)S\ge\left(\theta pM_1+\delta M\right)$$

მაშინ

$$R^{f_i}\le R^{f_j}$$

დამტკიცება: ვიპოვოთ ამ სტრატეგიების შეფასებები

$$R^{f_i}=\sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_i}(n)+\delta c^{f_i}(n)\right]+(1-\delta)^{m-1}\left[(1-\delta)r^{f_i}(m)+\delta c^{f_i}(m)\right]+$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r(n^{f_i})+\delta c^{f_i}(n)\right]$$

$$R^{f_j}=\sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_j}(n)+\delta c^{f_j}(n)\right]+(1-\delta)^{m-1}\left[(1-\delta)r^{f_j}(m)+\delta c^{f_j}(m)\right]+$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_j}(n)+\delta c^{f_j}(n)\right]$$

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$
\begin{aligned}
&R^{f_i} - R^{f_j} = (1-\delta)^{m-1}\left[(1-\delta)r^{f_i}(m) + \delta c^{f_i}(m) - (1-\delta)r^{f_j}(m) - \delta c^{f_j}(m)\right] = \\
&= (1-\delta)^{m-1} \times \\
&\times\left[(1-\delta)\left(S - (1-\alpha)q_i S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}(1-q_i)M_1\right) + \delta\left(S - \left(1-\alpha\right)q_i S - (1-q_i)M\right)\right] - \\
&-(1-\delta)^{m-1} \times \\
&\times\left[(1-\delta)\left(S - (1-\alpha)q_j S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}(1-q_j)M_1\right) + \delta\left(S - (1-\alpha)q_j S - (1-q_j)M\right)\right] = \\
&= (1-\delta)^{m-1}(q_i - q_j)\left[\theta p M_1 + \delta M - (1-\alpha)S\right]
\end{aligned}
$$

ცხადია, რომ თუ სრულდება (3.3) პირობა, $R^{f_i} - R^{f_j} \geq 0$, ნებისმიერი ნატურალური i -სა და m -ისათვის, ხოლო თუ სრულდება (3.4) პირობა, მაშინ $R^{f_i} - R^{f_j} \leq 0$, რ.დ.გ.

შედეგი: თუ სრულდება (3.3) პირობა, $f = (q_i, a_2, a_3, ...)$ ტიპის სტრატეგიებს შორის ყველაზე დიდი შეფასება აქვს $f_k = (q_k, a_2, a_3, ...)$ სტრატეგიას, ხოლო თუ სრულდება მისი საწინააღმდეგო (3.4) პირობა, მაშინ ყველაზე დიდი შეფასება აქვს $f_1 = (q_1, a_2, a_3, ...)$ სტრატეგიას. ანალოგიური წესით შეიძლება შეირჩეს საუკეთესო სტრატეგიები $f_k = (q_k, q_i, a_3, ...)$ და $f_1 = (q_1, q_i, a_3, ...)$ კლასებიდან და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ თუ სრულდება (3.3) პირობა, სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასში ოპტიმალურია $f^* = (q_k, q_k, q_k, ...)$ სტრატეგია, ხოლო თუ სრულდება (3.4) პირობა – $f^{**} = (q_1, q_1, q_1, ...)$.

4.3. ზემოთ აღწერილ მოდელში განხილულ იქნა კატასტროფული რისკების საუკეთესო პროპორციული გადაზღვევის შერჩევის ამოცანა და აღმოჩნდა, რომ იმისდა მიხედვით, თუ როგორია გადაზღვევის პრემია, ოპტიმალურია მაქსიმალური ან მინიმალური შესაძლო გადაზღვევა. ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ $q_1 = 0$, ანუ როდესაც გადაზღვევის პრემია მეტია პორტფელის საშუალო რისკზე, კომპანიისათვის მომგებიანია რისკის მთლიანად საკუთარ თავზე დატოვება. თუმცა, როგორც წინა პარაგრაფში აღინიშნა, პრაქტიკაში გაცილებით ხშირია სიტუაციები, როდესაც სრულდება (3.3) პირობა,

ანუ კომპანიისათვის მომგებიანია კატასტროფული რისკების რაც შეიძლება დიდი წილის გადაზღვევა.

§ 5 მოდელი №3 – არაპროპორციული გადაზღვევის შემთხვევა

5.1. განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც რეგიონალური სადაზღვევო კომპანია შემდეგი არჩევანის წინაშე დგას: გადააზღვიოს კატასტროფული რისკები არაპროპორციულად თუ არ გადააზღვიოს.

ზოგადად, არაპროპორციული გადაზღვევა წარმოადგენს გადაზღვევის ისეთ ტიპს, როდესაც გადამზღვეველი კომპანია იხდის ცედენტი კომპანიის პორტფელში განხორციელებული i -ური ზარალის იმ ნაწილს, რომელიც წინასწარ შეთანხმებულ R_i თანხას აღემატება. ჩვენ განვიხილავთ არაპროპორციული გადაზღვევის ისეთ სახეობას (stop loss cover), როდესაც ხდება არა ცალკეული რისკის, არამედ მთელი პორტფელის გადაზღვევა, ანუ წლის დასაწყისში ცედენტ და გადამზღვეველ კომპანიებს შორის ფორმდება კონტრაქტი, რომლის თანახმადაც ეს უკანასკნელი, გარკვეული პრემიის სანაცვლოდ საკუთარ თავზე იღებს პორტფელის ჯამური ზარალის იმ ნაწილს, რომელიც R თანხას აღემატება. ცხადია, რომ თუ წლის ბოლოს აღმოჩნდება, რომ პორტფელის ჯამური ზარალი R თანხას არ აღემატება, გადამზღვეველი კომპანია არანაირ ზარალს არ გადაიხდის.

ისევე როგორც წინა მოდელებში, პორტფელის წლიური ჯამური ზარალის განაწილებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\xi_i \sim \begin{pmatrix} 0 & M_1 & M \\ 1-\theta & p\theta & (1-p)\theta \end{pmatrix}$$

მოდელის შესაბამისი მარკოვის მართვადი ჯაჭვი შემდეგნაირად მოიცემა: მდგომარეობათა უსასრულო სიმრავლე $X = \{1,2,3,\ldots,k,\ldots\}$;

გადაწყვეტილებათა სასრული სიმრავლე $A=\{0,1\}$, სადაც 0 ნიშნავს გადაწყვეტილებას არ გადაზღვევის, ხოლო 1 – M_1-ის ტოლი საკუთარი წილით არაპროპორციულად გადაზღვევის შესახებ;

პროცესისაგან დამოუკიდებელი შეწყვეტის მომენტი τ , სტრატეგიათა თვლადი სიმრავლე F და ნებისმიერი სტრატეგიის შესაბამისი გადასვლის მატრიცა P^f (იხ. §3).

ყოველი სტაციონარული სტრატეგია წარმოადგენს 0-ებისა და 1-ების უსასრულო მიმდევრობას:

$$f_i=(a_1,a_2,a_3,...),\quad a_i=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

r და c ფულად ნაკადებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$r(j,0)=S-\frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}M_1 \qquad c(j,0)=S-M$$

$$r(j,1)=\beta S-\frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}M_1 \qquad c(j,1)=\beta S-M_1$$

სადაც $(1-\beta)S$ წარმოადგენს გადაზღვევის პრემიას.

5.2. ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგია სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასში, რისთვისაც დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 5.1: განვიხილოთ შემდეგი სტრატეგიები:

$f_1=(a_1,a_2,...,1,a_{m+1},...)$ და $f_0=(a_1,a_2,...,0,a_{m+1},...)$

თუ სრულდება პირობა

$$\delta(M-M_1)\geq(1-\beta)S \qquad (5.1)$$

მაშინ:

$$R^{f_1}\geq R^{f_0}$$

ხოლო თუ

$$\delta(M-M_1)\leq(1-\beta)S \qquad (5.2)$$

მაშინ:

$$R^{f_1}\leq R^{f_0}$$

დამტკიცება: ვიპოვოთ ამ სტრატეგიების შეფასებები

$$R^{f_1} = \sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_1}(n) + \delta c^{f_1}(n)\right] + (1-\delta)^m\left[(1-\delta)r^{f_1}(m) + \delta c^{f_1}(m)\right] +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_1}(n) + \delta c^{f_1}(n)\right]$$

$$R^{f_0} = \sum_{n=1}^{m-1}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_0}(n) + \delta c^{f_0}(n)\right] + (1-\delta)^m\left[(1-\delta)r^{f_0}(m) + \delta c^{f_0}(m)\right] +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty}(1-\delta)^{n-1}\left[(1-\delta)r^{f_0}(n) + \delta c^{f_0}(n)\right]$$

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$R^{f_1} - R^{f_0} = (1-\delta)^m\left[(1-\delta)(\alpha S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}M_1) + \delta(\alpha S - M_1)\right] -$$

$$-(1-\delta)^m\left[(1-\delta)(S - \frac{\theta p}{1-\theta+\theta p}M_1) + \delta(S - M)\right] =$$

$$= (1-\delta)^m\left[\delta(M - M_1) - (1-\alpha)S\right]$$

როგორც ცნობილია $\alpha, \delta \in (0,1), M > M_1$. აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ თუ სრულდება (5.1) პირობა $R^{f_1} \geq R^{f_0}$, ხოლო თუ სრულდება (5.2) პირობა $R^{f_1} \leq R^{f_0}$ რ.დ.გ.

შედეგი: თუ სრულდება (5.1) პირობა სტაციონარულ სტრატეგიათა კლასში ოპტიმალურია $f^* = (1,1,1,...)$ სტრატეგია, ხოლო თუ სრულდება (5.2) პირობა – $f^{**} = (0,0,0,...)$ სტრატეგია.

5.3. თუკი დავაკვირდებით (5.1) და (5.2) პირობებს, დავინახავთ, რომ მარცხენა მხარეში მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს გადამზღვევლის ყოველწლიურ საშუალო რისკს, მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულება – გადაზღვევის პრემიას. უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკაში გაცილებით უფრო ხშირად (5.1) უტოლობა სრულდება და შესაბამისად რეგიონალური სადაზღვევო კომპანიის ოპტიმალურ ქცევას გადაზღვევა წარმოადგენს.

§ 6 დასკვნა

განხილული მოდელებიდან გამომდინარეობს შემდაგი დასკვნა: თუ ქცევის კრიტერიუმად კატასტროფის მოხდენამდე საშუალო ჯამურ ფულად ნაკადს ავირჩევთ, რეგიონალური სადაზღვევო კომპანია შეძლებისდაგვარად მაქსიმალურად უნდა ეცადოს, რომ კატასტროფული რისკები საერთაშორისო ბაზარზე გადააზღვიოს, თუ გადაზღვევის პრემია არაბუნებრივად მაღალი არ არის. ეს დასკვნა სამართლიანია როგორც პროპორციული, ასევე არაპროპორციული გადაზღვევისათვის. სხვა სიტყვებით, პორტფელში გაერთიანებულ რისკებს შორის ძლიერი დამოკიდებულების არსებობისას, ფინანსურად წამგებიანია ბიზნესის გრძელვადიან პრინციპეპზე წარმოება ანუ რისკის დროში გადანაწილება იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც ყველა შემოსული წლიური პრემიები მთლიანად რეზერვირდება და ინვესტირდება ისე, რომ მისი დღევანდელი ღირებულება უცვლელი დარჩეს. უფრო მეტიც, ასევე წამგებიანია რაიმე სახის შერეული ქცევა – გადაზღვევის დონის ცვლა წლების განმავლობაში. კატასტროფული რისკები მაქსიმალურად ფართო პორტფელში უნდა იყოს განთავსებული, რათა მაქსიმალურად იმოქმედოს ‘‘სივრცეში’’ რისკის გადანაწილების ეფექტმა, თუნდაც ყოველწლიურად კომპანიას გადაზღვევის შემდეგ მინიმალური შემოსავალი რჩებოდეს.

ლიტერატურა

1. Blackwell, D. Discrete dynamic programming, Ann. Math. Statis., 33, 2 (1962)
2. Blackwell, D. Discounted dynamic programming, Ann. Math. Stat.1965,36, p. 226-235.
3. А. А. Юшкевич, Р. Я. Читашвили. Управляемые случайные последовательности и Цепи маркова. Успехи мат. наук, том 37, выпуск 6(228), 1982
4. მიხეილ მანია, გურამ მირზაშვილი. დაზღვევის ძირითადი პრინციპები მათემატიკური თვალსაზრისით. აქტუარების და ფინანსური ანალიტიკოსების ასოციაცია. თბილისი 1999
5. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მირზაშვილი, თ. ტორონჯაძე, ო. ღლონტი, ლ. ჯამბურია. ფინასური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი, საქართველოს სტატისტიკური ასოციაცია, ფონდი “ ევრაზია”, თბილისი 1999